Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

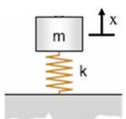
Машински факултет

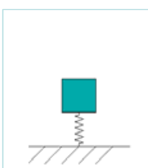
ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО

2. СЛОБОДНИ НЕПРИДУШЕНИ ОСЦИЛАЦИИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

2.1. ТРАНСЛАТОРЕН СИСТЕМ ОД ТЕЛО СО МАСА И ПРУЖИНА

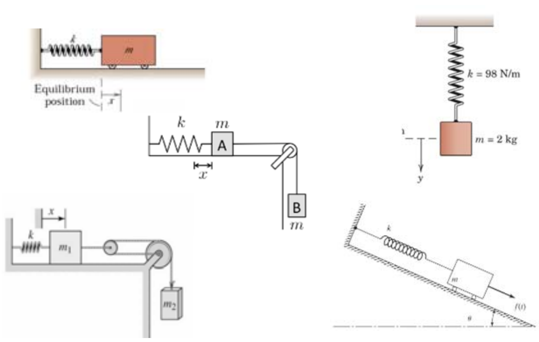




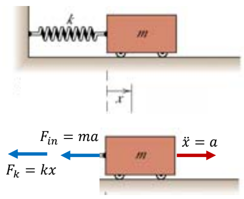
Системот составен од тело со маса „m“ која може да врши транслаторно движење и пружина која на едната страна е поврзана за фиксна точка, а на другата за телото, претставува транслаторен систем од тело со маса и пружина.

Ако телото го извадиме од рамнотежна состојба, и го пуштиме без почетна брзина, тоа ќе почне да ја променува положбата по закон на проста хармониска функција.

Дали движењето на системите е исто?



Поставување на равенка на движење



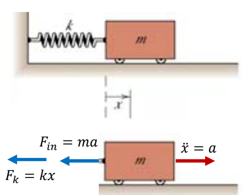
$$ma = \sum F$$
$$m\ddot{x} = -kx$$
$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_n}^2 x = 0}$$

Примерот претставен на сликата е идеализиран случај на систем од маса и пружина, односно земено е дека не постои триење или други отпорни сили кои ќе се спротвставуваат на движењето.
Иако не е реален, сепак претстатвува основа за изучувањето на вибрациите бидејќи ја дава основната карактеристика на системот, односно сопствената фреквенција.

Решение на равенката на движење



$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_n}^2 x = 0}$$

$$x = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$$

$$v = \dot{x} = C_1\omega_n \cos(\omega_n t) - C_2\omega_n \sin(\omega_n t)$$

од почетните услови

$$t = 0 \ \rightarrow x(0) = x_0 \ \text{ и } \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = x_0 \qquad C_1 = v_0/\omega_n$$

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega_n} sin\omega_n t + x_0 \, cos\omega_n t$$

Математичка интерпретација на решението

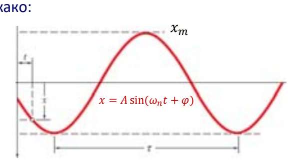
$$x(t) = \frac{v_o}{\omega_n} sin\omega_n t + x_0 \, cos\omega_n t$$

ова решение може да го запишеме како:

$x = x_m \sin(\omega_n t + \varphi)$ каде што:

$$x_m = \mathrm{A} = \sqrt{(v_0/\omega_n)^2 + {x_0}^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{v_0}{\omega_n x_0}$$

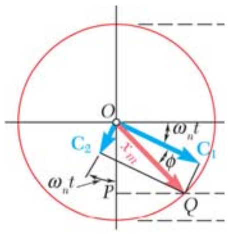


Графиците за брзината и забрзувањето може да се претстават како синусоидни криви со иста периода како поместувањата но со друго фазно поместување:

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} \\ &= x_m\omega_n \cos(\omega_n t + \phi) \\ &= x_m\omega_n \sin(\omega_n t + \phi + \pi/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \ddot{x} \\ &= -x_m\omega_n^2 \sin(\omega_n t + \phi) \\ &= x_m\omega_n^2 \sin(\omega_n t + \phi + \pi) \end{aligned}$$

2.2. ВРСКА ПОМЕЃУ ЛИНИСКА И КРУЖНА ФРЕКВЕНЦИЈА



Решението на диференцијалната равенка може да се претстави и со ротирачки вектор кој ротира со брзина ω_n

$$x = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$$

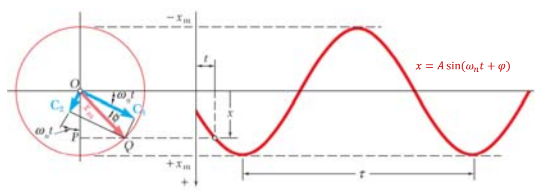
$$C_1 = v_0/\omega_n$$

$$C_2 = x_0$$

$$\boxed{x = x_m \sin(\omega_n t + \varphi)}$$

$x_m = \sqrt{(v_0/\omega_n)^2 + x_0^2}$ амплитуда

$\varphi = \tan^{-1}(x_0\omega_n/v_0)$ фазен агол



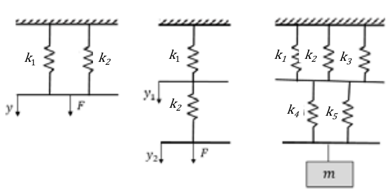
Врската помеѓу периодата T_n и аголната фреквенција ω_n е определена со изразот:

$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ периода [s]

Врската помеѓу фреквенцијата f_n и аголната фреквенција ω_n е определена со изразот:

$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$ сопствена фреквенција [Hz]

2.3. ЕКВИВАЛЕНТНА КРУТОСТ



а. Паралелно соединети елементи | б. Сериски соединети елементи | в. Комбинирано соединети елементи

$$k_e = k_1 + k_2 \qquad k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \qquad k_{13} = k_1 + k_2 + k_3; \quad k_{45} = k_4 + k_5$$

$$k_e = \sum_i^n k_i \qquad k_e = \frac{1}{\sum_i^n 1/k_i} \qquad k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_{13}} + \frac{1}{k_{45}}}$$

Пример:

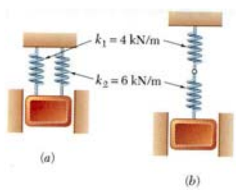
Тело со маса 50-kg може да се движи вертикално како што е прикажано на сликата. Трлото е повлечено надоле за 40mm од неговата рамнотежна положба и отпуштено без почетна брзина.

За двата случаи прикажани на сликата да се определи:

– периодот на осцилации

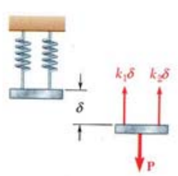
– максималната брзина на телото

– максималното забрзување на телото



Решение (а):

$k_1 = 4\,\mathrm{kN/m} \quad k_2 = 6\,\mathrm{kN/m}$



$$P = k_1\delta + k_2\delta$$

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2$$

$$= 10\,\mathrm{kN/m} = 10^4\,\mathrm{N/m}$$

- Да се определи еквивалентната крутост на пружините
- Да се определат вредностите на основните параметри за слободни непридушени вибрации

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^4\,\mathrm{N/m}}{20\,\mathrm{kg}}} = 14.14\,\mathrm{rad/s}$$

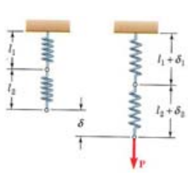
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \boxed{\tau_n = 0.444\,\mathrm{s}}$$

$$v_m = x_m\omega_n = (0.040\,\mathrm{m})(14.14\,\mathrm{rad/s}) \qquad \boxed{v_m = 0.566\,\mathrm{m/s}}$$

$$a_m = x_m a_n^2 = (0.040\,\mathrm{m})(14.14\,\mathrm{rad/s})^2 \qquad \boxed{a_m = 8.00\,\mathrm{m/s^2}}$$

Решение (б):

$k_1 = 4\,\mathrm{kN/m} \quad k_2 = 6\,\mathrm{kN/m}$



$$P = k_1\delta + k_2\delta$$

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2$$

$$= 10\,\mathrm{kN/m} = 10^4\,\mathrm{N/m}$$

- Да се определи еквивалентната крутост на пружините
- Да се определат вредностите на основните параметри за слободни непридушени вибрации

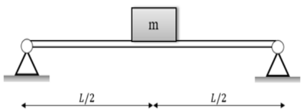
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2400\mathrm{N/m}}{20\,\mathrm{kg}}} = 6.93\,\mathrm{rad/s}$$

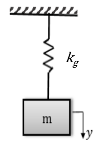
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \boxed{\tau_n = 0.907\,\mathrm{s}}$$

$$v_m = x_m\omega_n = (0.040\,\mathrm{m})(6.93\,\mathrm{rad/s}) \qquad \boxed{v_m = 0.277\,\mathrm{m/s}}$$

$$a_m = x_m a_n^2 = (0.040\,\mathrm{m})(6.93\,\mathrm{rad/s})^2 \qquad \boxed{a_m = 1.920\,\mathrm{m/s^2}}$$

2.4. ГРЕДА КАКО ЕЛАСТИЧЕН ЕЛЕМЕНТ





$$y_{st} = \frac{GL^3}{48EJ}$$

$$G = y_{st} k_g \quad \rightarrow \quad y_{st} = \frac{g}{k_g}$$

$$\frac{g}{k_g} = \frac{GL^3}{48EJ}$$

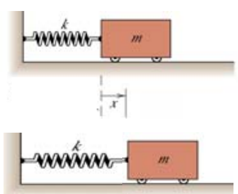
$$k_g = \frac{48EJ}{L^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}} \; [s^{-1}]$$

2.5. ПРИМЕНА НА ЗАКОНОТ ЗА ЗАПАЗУВАЊЕ НА МЕХАНИЧКАТА ЕНЕРГИЈА

За конзервативни системи во кои немаме отпорни сили важи законот за запазување на кинетичката енергија:

$$E_k + E_p = const.; \quad \frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0$$



$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} \qquad E_p = \frac{k\,x^2}{2}$$

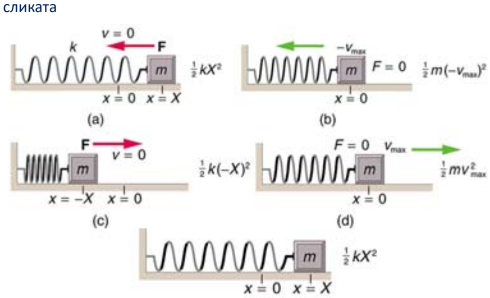
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2m\,\ddot{x}\,\dot{x}}{2} + \frac{2k\,x\,\dot{x}}{2} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_n}^2 x = 0}$$

Законот за запазување на механичката енергија укажува дека таа постојано се претвара од еден во друг вид. Трансформацијата на енергиите при едноставни хармониски движења е илустрирано на сликата



Кога масата поминува низ рамнотежна положба таа има максимална кинетичка енергија, додека потенцијалната енергија е нула ($E_k = E_{kmax};\ E_p = 0$). Во крајните положби кинетичката енергија е нула, поради нултата брзина, а потенцијалната максимална ($E_k = 0;\ E_p = E_{pmax}$)

$$E_{kmax} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} X^2 {\omega_n}^2 m; \qquad E_{pmax} = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} k\, X^2$$

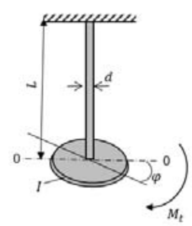
$$E_{kmax} = E_{pmax}$$

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} k\, X^2 \Longrightarrow v_{max} = X \sqrt{\frac{k}{m}} = X\ \omega_n$$

$$E_{kmax} = E_{pmax}$$

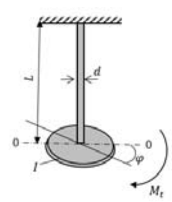
$$\frac{1}{2} X^2 {\omega_n}^2 m = \frac{1}{2} k\, X^2 \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.6. ТОРЗИОНИ ОСЦИЛАЦИИ



За динамички модел на осцилаторен систем со еден степен на слобода кој врши торзиони осцилации може да се усвои вертикално вратило со пречник d кое е вклештено на едниот крај, а на другиот крај има диск со момент на инерција I

Произволната положба на дискот во секој момент е наполно одредена со аголот на усукување φ. Доколку се занемари масата на вратилото, системот има еден степен на слобода. Во тој случај положбата ќе се дефинира со една генерализирана координата φ, која претставува аголна координата.



Деформацијата при торзија изнесува:

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_p}; \quad \varphi = \frac{32 M_t l}{\pi G d^4}$$

Торзионата крутост се добива како:

$$k_t = \frac{M_t}{\varphi} = \frac{\pi G d^4}{32 l} \quad [\frac{Nm}{rad}]$$

Диференцијалната равенка на слободни непридушени торзиони осцилации ќе биде:

$$I\ddot{\varphi} + k_t \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \frac{k_t}{I}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = 0$$

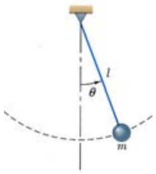
Математичкото решение за диференцијалната равенка ќе биде:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_s} sin\omega_n t + \varphi_0 cos\omega_n t$$

Што е идентично со решението на транслаторен систем:

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega_n} sin\omega_n t + x_0\ cos\omega_n t$$

2.7. ОСЦИЛАЦИИ НА НИШАЛО

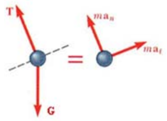


Анализата на систем од маса и пружина може да се примени секогаш кога резултантната сила на концентрираната маса е пропорционална на поместувањето и се стреми телото да го доведе во рамнотежна положба.

$$\sum F_t = ma_t$$

$$-G\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$



Со воведување на апроксимација дека за мали агли sinθ≈θ, се добива

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_n t + \varphi)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

со експлицитното решение на диф. р-ка $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

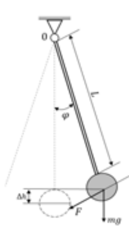
се добива $$T_n = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_m/2)\sin^2\varphi}}$$

што може да се реши нумерички.

Решението за периодата може да се добие со примена на корекционен фактор согласно табелата

$$T_n = \frac{2K}{\pi}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

θ_m	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	∞
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	∞



До истото решение се доаѓа ако се примени и Њутновиот закон:

$$I\ddot{\varphi} = \sum M$$

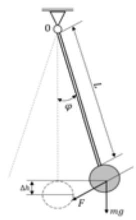
$$I\ddot{\varphi} + mgL\,sin\varphi = 0$$

$I = mL^2$ материјален момент на инерција на маса m во однос на оската која минува низ точката 0

$sin\varphi \approx \varphi$ за мали осцилации

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0 \qquad \omega_n^2 = \frac{g}{L}$$

$$\varphi = \varphi_0 sin\omega_n t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n} cos\omega_n t$$



До истото решение се доаѓа ако се примени и Законот за запазување на механичката енергија:

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right) = 0$$

$$E_k = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m L^2 \, \dot{\varphi}^2 \qquad I = mL^2$$

$$E_p = mg\Delta h = mgL(1 - cos\varphi)$$

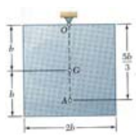
$$\frac{2m\, L^2 \, \ddot{\varphi}\, \dot{\varphi}}{2} + mg \, L \, sin\varphi \, \dot{\varphi} = 0$$

$sin\varphi \approx \varphi$ за мали осцилации

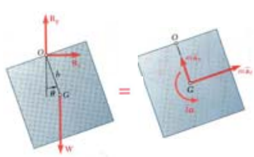
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0 \qquad \omega_n^2 = \frac{g}{L}$$

$$\varphi = \varphi_0 sin\omega_n t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n} cos\omega_n t$$

Пример:

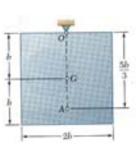


- Доколку р-ката на движење ја има формата:
  $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ или $\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$
  осцилациите може да се разгледуваат како едноставни хармониски осцилации.



- Ако целта на анализата е да се определи сопствената фреквенција ω_n, тогаш равенката на осцилации на квадратната плоча ќе биде:

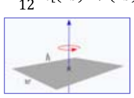
$$-W(b \sin\theta) = \left(mb\ddot{\theta}\right) + \bar{I}_c \ddot{\theta}$$



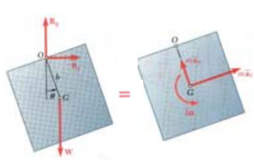
$$\boxed{-G(b \sin\theta) = \left(mb\ddot{\theta}\right) + \bar{I}_c \, \ddot{\theta}}$$

Материјалниот момент на инерција е:

$$\bar{I}_c = \frac{1}{12} m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3} mb^2, \qquad G = mg$$



$$\boxed{I_c = \frac{1}{12} m\left(h^2 + w^2\right)}$$



За мали осцилации важи изразот:

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b}\sin\theta \cong \ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b}\theta = 0$$

Р-ката е иста како за нишало со: $l = 5b/3$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3g}{5b}}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}}$$