



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје  
Машински факултет

## ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО

### 2. СЛОБОДНИ НЕПРИДУШЕНИ ОСЦИЛАЦИИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО  
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### 2.8. ПРИМЕНА НА ЛАГРАНЖОВАТА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД

За добивање на диференцијалната равенка на движење на еден осцилаторен систем може да се примени Лагранжовата равенка од II ред, која за конзервативен систем е:

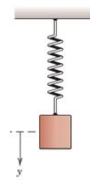
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

$$E_k = \frac{m\dot{y}^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{2m\dot{y}}{2} \right) = m\ddot{y}$$

$$E_p = \frac{ky^2}{2}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{2ky}{2} = ky$$



$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$



ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО  
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

---

---

---

---

---

---

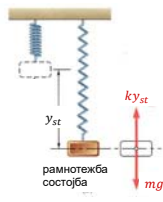
---

---

---

---

Кај системи каде што од сопствената тежина пружината е деформирана од почетната положба за да се добие рамнотежната положба, потенцијалната енергија од промена на висината на телото со маса m не се зема предвид бидејќи се компензира со енергијата од деформираната пружина, односно за потенцијалната енергија се добива:



$$E_p = \frac{k(y_{st} + y)^2}{2} - mgy$$

$$E_p = \frac{k(y_{st}^2 + 2y_{st}y + y^2)}{2} - mgy$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = ky_{st} + \frac{2ky}{2} - mg = ky$$



ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО  
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

---

---

---

---

---

---

---

---

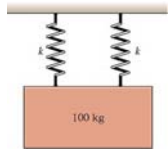
---

---

**ПРИМЕР:**

За системот прикажан на сликата, под претпоставка дека движењето е само вертикално да се определи:

- а) равенката на движење користејќи ја Лагранжовата р-ка од втор ред,
- б) сопствената фреквенција на системот ако  $m=100\text{ kg}$ , и секоја пружина има крутост  $k=200\text{ kN/m}$
- в) максималното забрзување на масата ако почетното поместување било  $0.1\text{ m}$  под рамнотежната положба и телото било пуштено со почетна брзина  $0.3\text{ m/s}$  насочена надолу.



---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**РЕШЕНИЕ:**

---

---

---

---

---

---

---

---

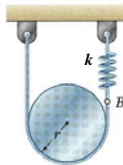
---

---

**ПРИМЕР:**

Цилиндар со радиус  $r$  и маса  $M$  е врзан како што е прикажано на сликата. Да се определи:

- а) равенката на движење користејќи ја Лагранжовата р-ка од втор ред,
- б) сопствената фреквенција на системот
- в) Периодот на осцилации на цилиндарот.



---

---

---

---

---

---

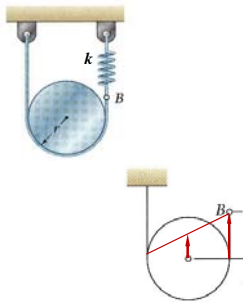
---

---

---

---

РЕШЕНИЕ:



$$\ddot{\theta} + \frac{8k}{3m}\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

---

---

---

---

---

---

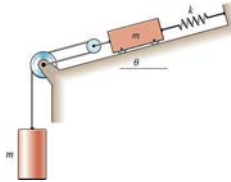
---

---

ПРИМЕР:

За системот прикажан на сликата да се определи:

- равенката на движење користејќи ја Лагранжовата р-ка од втор ред,
- сопствената фреквенција на системот ако сакоја маса е  $m=5$  kg и пружината има крутост  $k=325$  N/m
- максималното забрзување на вертикалното тело ако почетното поместување било 0.1m под рамнотежната положба и телото било пуштено без почетна брзина.




---

---

---

---

---

---

---

---

РЕШЕНИЕ:

---

---

---

---

---

---

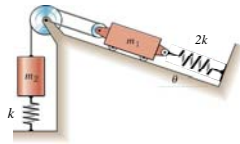
---

---

ПРИМЕР:

За системот прикажан на сликата да се определи:

- а) равенката на движење користејќи ја Лагранжовата р-ка од втор ред,
- б) сопствената фреквенција на системот ако  $m_1 = 6 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $k = 200 \text{ N/m}$
- в) максималното забрзување на вертикалното тело ако почетното поместување било  $0.1 \text{ m}$  под рамнотежната положба и телото било пуштено без почетна брзина.



---

---

---

---

---

---

---

---

РЕШЕНИЕ:

---

---

---

---

---

---

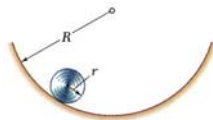
---

---

ПРИМЕР:

Цилиндар со радиус  $r$  и маса  $m$  се движи по крива површина со радиус  $R$  без пролизгување. Ако се занемарат силите на триење, да се определи:

- а) равенката на движење користејќи ја Лагранжовата р-ка од втор ред,
- б) сопствената фреквенција на системот за мали осцилации,
- в) периодот на мали осцилации на цилиндарот.



---

---

---

---

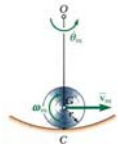
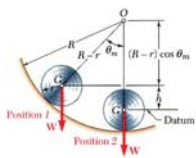
---

---

---

---

РЕШЕНИЕ:



$$\omega_n^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{R-r}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

---

---

---

---

---

---

---

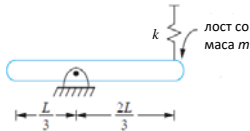
---

---

---

ПРИМЕР:

Лост со маса  $m$  и должина  $L$  слободно може да ротира околу неподвижното лежиште, а е поврзан со пружина со крутост  $k$  за едниот крај. Ако рамнотежната положба е хоризонтална, да се определи:



- равенката на движење користејќи ја Лагранжовата р-ка од втор ред,
- сопствената фреквенција на системот,
- периодот на мали осцилации

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

РЕШЕНИЕ:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---