Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

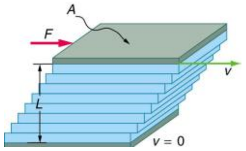
ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО

3. СЛОБОДНИ ПРИДУШЕНИ ОСЦИЛАЦИИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

3.1. ПОИМ ЗА ВИСКОЗНО ТРИЕЊЕ

Сила од вискозно триење е формулација за опишување на феноменот на придушување при што отпотната сила од придушување се претставува како функција од волуменот, обликот и брзината на телото кое се движи низ реален флуид со определена вискозност.



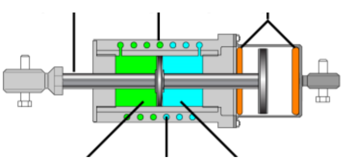
$$F = \eta \frac{vA}{L},$$

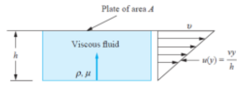
Ако разгледуваме движење на плоча со константна брзина по вискозен флуид со експеримент може да се докаже дека е потребна сила F за да се одржува брзината. Оваа сила ја нарекуваме сила од вискозно триење и истата е пропорционално зависна од брзината, површината на плочата, коефицентот на вискозност на флуидот, а обратно пропорционална на растојанието до неподвижната плоча.

Вискозното пригушување кај машинските системи настанува од:

- лизгачки побршини со филм од флуид помеѓу нив
- струење на флуид околу клип од цилиндар,
- струење на флуид низ отвори и бленди
- струење на флуид во лежишта

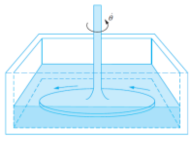
Типичен пример за придушен елемент со вискозно триење е амортизерот:



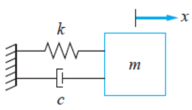


$F = cv$ $\qquad c = \frac{\mu A}{h}$

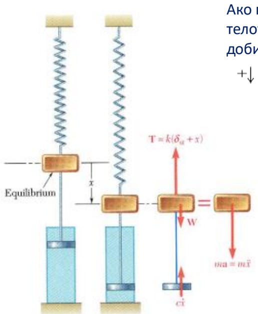
При математичко моделирање на механичките ситеми со вискозно триење придушниот елемент ќе се претставува како на сликата со коефицент на пригушување c, а силата која настанува од придушниот елемент ќе биде пропорционална на брзината.



$M = c_t\dot{\theta}$



3.2. РАВЕНКА НА ДВИЖЕЊЕ ЗА СЛОБОДНИ ПРИДУШЕНИ ОСЦИЛАЦИИ



Ако ги нанесеме сите сили што дејствуваат на телото и го примениме Њутновиот закон, добиваме:

$+\downarrow \quad \sum F = ma:$

$$G - k(y_{st} + y) - c\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

Ако замениме

$$2\xi = \frac{c}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

добиваме

$$\boxed{\ddot{y} + 2\xi\dot{y} + \omega_n^2 y = 0}$$

Равенката со која се опишува системот кој врши слободни придушени осцилации е хомогена линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти:

$$\boxed{\ddot{y} + 2\xi\dot{y} + \omega_n^2 y = 0}$$

Општото решение на диф. р-ка е во облик : $\quad y = Ce^{rt}$

Првиот и вториот извод од општото решение се: $\quad \dot{y} = rCe^{rt} \quad$ и $\quad \ddot{y} = r^2Ce^{rt}$

Решението мора во секој момент да ја задоволува диф. р-ка, па со замена на општото решение и неговите изводи во диф. р-ка се добива:

$$r^2Ce^{rt} + 2\xi rCe^{rt} + \omega_n^2 Ce^{rt} = 0$$

$$(r^2 + 2\xi r + \omega_n^2)Ce^{rt} = 0$$

Претходното равенство ќе биде точно ако изразот во заградата е „0“. Ова равенство се нарекува карактеристична равенка:

$$(r^2 + 2\xi r + \omega_n^2) = 0$$

Корените на оваа равенка се од облик:

$$r_{1/2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_n^2}$$

Општото решение на диф. р-ка го има обликот:

$$y = C_1 y^{r_1 t} + C_2 y^{r_2 t}$$

каде што C_1 и C_2 се константи кои се определуваат од почетните услови.

Во зависност од вредностите на ξ^2 и ω_n^2, корените на карактеристичната равенка може да бидат два коњугирано комплексни броја, два реални броеви или еден реален број. Во зависност од видот на корените на карактеристичната равенка движењата на системот ќе бидат различни.

3.3. ОСЦИЛАЦИИ НА СИСТЕМИ СО МАЛО ПРИДУШУВАЊЕ

Корените на карактеристичната равенка се :

$$r_{1/2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_n^2}$$

За мало пригушување $\xi < \omega_n$ се добиваат два коњугирано комплексни броеви :

$r_{1/2} = -\xi \pm \omega_d i$ каде што: $\omega_d^2 = \xi^2 - \omega_n^2$

За општото решение на диф. р-ка се добива:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1\ e^{(-\xi + \omega_d i)t} + C_2\ e^{(-\xi - \omega_d i)t}$$

$$y = e^{-\xi t}\left(C_1\ e^{\omega_d i t} + C_2 e^{-\omega_d i t}\right) = y = e^{-\xi t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t)$$

$$\boxed{y = A\, e^{-\xi t} \sin(\omega_d t + \varphi)}$$

Кога придушувањето кај системот е мало решението на диф. р-ка е производ од експоненцијална опаѓачка функција и хармониска функција.

$$\boxed{y = A\, e^{-\xi t} \sin(\omega_d t + \varphi)}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{\left(\frac{c}{2k}\right)^2 - 1}$$

фреквенција на придушени осцилации

Колку е периодот на придушени осцилации ???

Константите C_1 и C_2 се определуваат од почетните услови, па ако почетните услови се:

$$t = 0; \quad y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

за константите C_1 и C_2 се добива: $C_1 = \dfrac{\dot{y}_0 + \xi\, y_0}{\omega_\mathrm{d}}$ $\quad C_2 = y_0$

да се изведе добивањето на константите.......

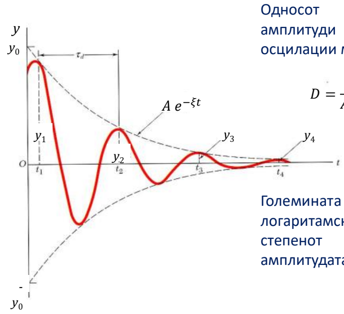
односно одговорот на системоте е:

$$y = e^{-\xi t}\left(\frac{\dot{y}_0 + \xi\, y_0}{\omega_\mathrm{d}} \sin \omega_\mathrm{d} t + y_0 \cos \omega_\mathrm{d} t\right) = \mathrm{A} e^{-\xi t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

каде што:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{y}_0 + \xi\, y_0}{\omega_\mathrm{d}}\right)^2 + y_0^2} \qquad \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{y_0\, \omega_d}{\dot{y}_0 + \xi\, y_0}$$

3.4. ЛОГОРИТАМСКИ ДЕКРАМЕНТ



Односот на две последователни амплитуди при слободни придушени осцилации може да се запише како:

$$D = \frac{A\,(t)}{A\,(t + T_d)} = \frac{A_0 e^{-\xi t}}{A_0 e^{-\xi (t + T_d)}} = e^{\xi\, T_d}$$

Големината $\delta = \ln D = \xi\, T_d$ се нарекува логаритамски декремент и го покажува степенот на намалување на амплитудата.

3.5. КРИТИЧНО ПРИДУШУВАЊЕ

Во случај на $\xi = \omega_n$ се добива едно реално решение на карактеристичната равенка $r_{1/2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_n^2}$ односно одговорот на системот има облик:

$$y = C_1 e^{-r_1 t} + C_2\, t\, e^{-r_1 t} = e^{-\xi t}(C_1 + C_2\, t)$$

Константите C_1 и C_2 се определуваат од почетните услови, па ако почетните услови се:

$$t = 0; \quad y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = v_0$$

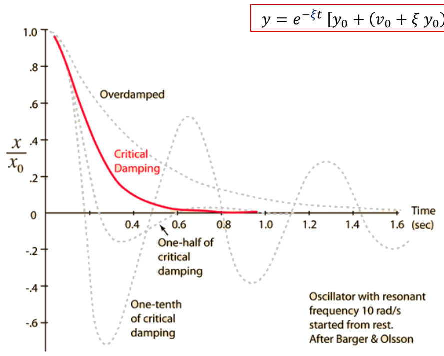
за константите C_1 и C_2 се добива: $C_1 = y_0$ $\quad C_2 = v_0 + \xi\, y_0$

да се изведе добивањето на константите.......

Одговорот на системот е:

$$\boxed{y = e^{-\xi t}\,[y_0 + (v_0 + \xi\, y_0)\, t]}$$

$$y = e^{-\xi t}\,[y_0 + (v_0 + \xi\, y_0)\, t]$$



Критичниот коефициент на вискозните отпори c_{kr} ја дефинира големината на отпорите при кои движењето на дадениот систем претставува да биде осцилаторно. Се определува со следната релација:

$$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow c_{kr} = 2\sqrt{km}$$

3.6. СИСТЕМИ СО ГОЛЕМО ПРИДУШУВАЊЕ

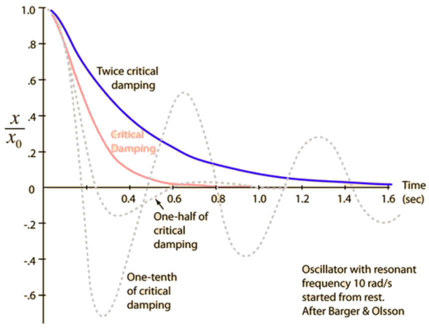
Корените на карактеристичната равенка за големо пригушување $\xi > \omega_n$ се реални и негативни :

$$r_{1/2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_n^2}$$

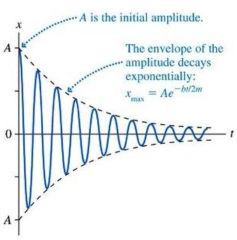
Во таков случај за одговорот на системот се добива:

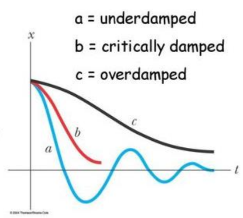
$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Општото решение се состои од збир на две опаѓачки експоненцијални криви, односно движењето е апериодично и системот нема осцилации.



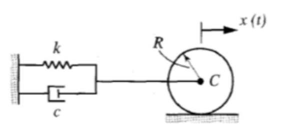
РЕЗИМЕ





ПРИМЕР: (за дома)

За системот прикажан на сликата да се пресмета фреквенцијата на придушени осцилации ако: m = 1750 kg ; c = 3500 N s/m; k = 735 N/m; R=1,25 m. Исто така да се определи вредноста на критичното придушување.



ПРИМЕР: (за дома)

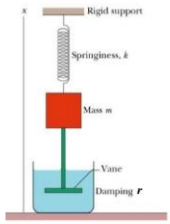
За доленаведената задача да се определат бараните големини и да се објани начинот на доаѓање до решението.

For the damped oscillator shown, $m = 250$ g, $k = 85$ N m^{-1}, and $r = 0.070$ kg s^{-1}.

(a) What is the period of the motion?

(b) How long does it take for the amplitude of the damped oscillation to drop to half of its initial value?

(c) How long does it take for the mechanical energy to drop to one half its initial value.



(a) Period is approximately that of undamped oscillator:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25}{85}} = 0.34\text{ s}$$

(b) Amplitude of oscillation: $Ae^{-rt/2m} = 0.5A$

$$\ln\left(e^{-rt/2m}\right) = -rt/2m = \ln 0.5$$

$$t = \frac{-2m\ln 0.5}{r} = \frac{-2\times 0.25\times(-0.6931)}{0.070} = 4.95\text{ s}$$

(c) Mechanical energy at time t is $\frac{1}{2}kA^2e^{-rt/m}$

$$\frac{1}{2}kA^2e^{-rt/m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

$$\therefore \quad -\frac{rt}{m} = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{-m\ln\frac{1}{2}}{r} = \frac{-(0.25)(-0.6931)}{0.070} = 2.48\text{ s}$$