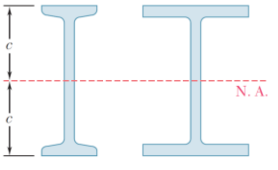
ЈАКОСТ 1

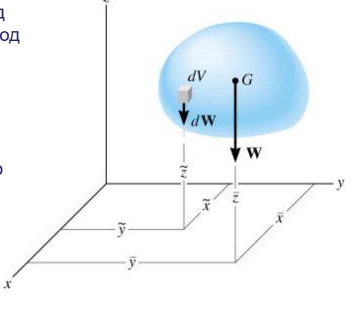
5. ГЕОМЕТРИСКИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА РАМНИНСКИ НАПРЕЧНИ ПРЕСЕЦИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

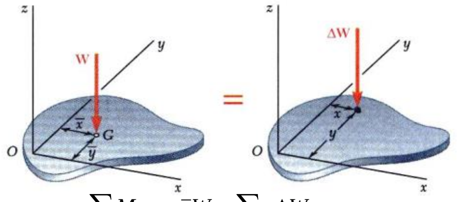


5.1. ПОИМ ЗА ТЕЖИШТЕ НА ТЕЛО

Гравитационите сили од елементарните делови од кои е составено телото, може да се заменат со дејство на една резултантна сила со големина колку што е тежината на телото и со нападна точка во **тежиштето на телото**



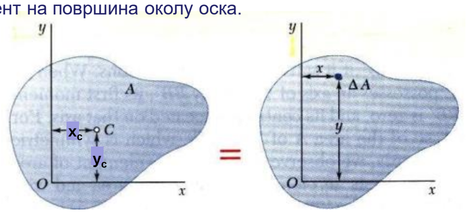
тежиштето на тенка плоча може да се определи од условот дека дека моментот од гравитационата сила (околу соодветната оска) е збир од моментите кои ги прават елементарните гравитациони сили околу истата оска.



$$\sum M_y \Rightarrow \bar{x}W = \sum x\Delta W$$
$$\sum M_x \Rightarrow \bar{y}W = \sum y\Delta W$$

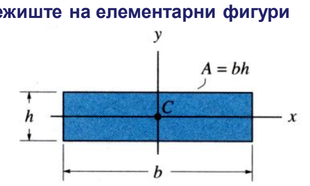
5.2. ТЕЖИШТЕ НА ПОВРШИНА

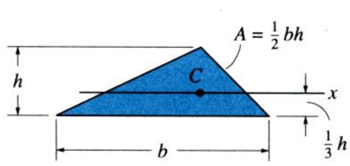
тежиштето на површина се пресметува по аналогија со тежиштето на тенка плоча при што се употребува концептот на момент на површина околу оска.



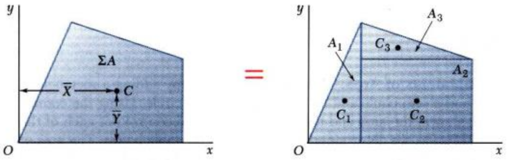
$$x_C = \frac{\sum \Delta A_i \cdot x_i}{A} \quad ; \quad y_C = \frac{\sum \Delta A_i \cdot y_i}{A}$$

тежиште на елементарни фигури



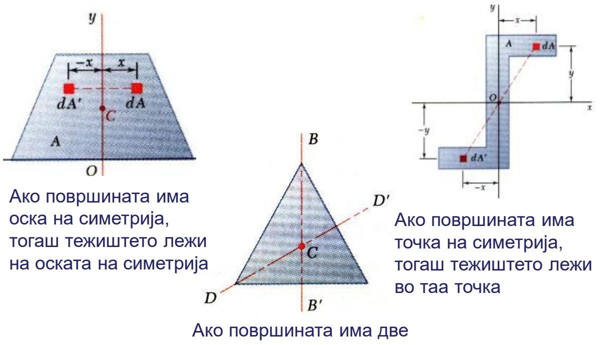


5.3. ТЕЖИШТЕ НА ПОВРШИНА СО СЛОЖЕН ОБЛИК



$$x_C = \frac{\sum A_i \cdot x_{Ci}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} + A_2 \cdot x_{C3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_C = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ci}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + A_2 \cdot y_{C3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$



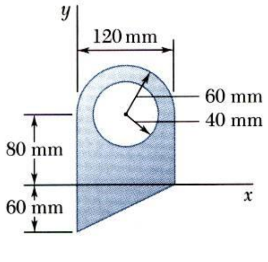
Ако површината има оска на симетрија, тогаш тежиштето лежи на оската на симетрија

Ако површината има две оски на симетрија, тогаш тежиштето е во пресекот на тие две оски

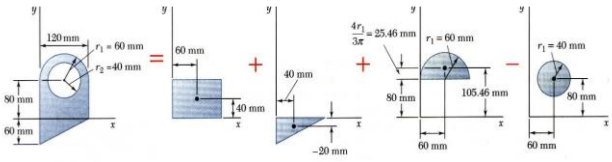
Ако површината има точка на симетрија, тогаш тежиштето лежи во таа точка

Пример 5.1:

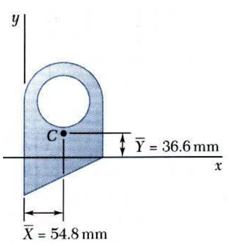
Да се определи тежиштето на сложената фигура дадена на сликата.



Решение 5.1:



	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
правоаг.	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
триагол.	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
полукруг	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
круг	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \, \text{mm}^3}{13.828 \times 10^3 \, \text{mm}^2}$$

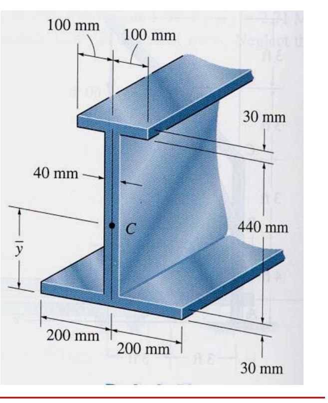
$$\boxed{\bar{X} = 54.8 \, \text{mm}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \, \text{mm}^3}{13.828 \times 10^3 \, \text{mm}^2}$$

$$\boxed{\bar{Y} = 36.6 \, \text{mm}}$$

Пример 5.2:

Да се определи тежиштето на сложената фигура дадена на сликата.



Решение 5.2:

5.4. СТАТИЧКИ МОМЕНТ НА ПОВРШИНА

Статичкиот момент на рамната површина A во однос на една оска во истата рамнина е еднаков на збирот од производите на елементарните површини и на нивните нормални растојанија до оските.

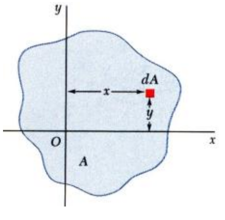
$$S_x = \sum \Delta A_i \cdot y_i \quad ; \quad S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \sum \Delta A_i \cdot x_i \quad ; \quad S_y = \int_A x \cdot dA$$

Статичкиот момент на една површина A во однос на нејзините тежишни оски е еднаков на нула!!

5.5. АКСИЈАЛЕН МОМЕНТ НА ИНЕРЦИЈА

Аксијален момент на инерција на површина околу оска, по дефиниција е сума на производите од елементарните површини и квадратот на растојанието од нивните тежишта до разгледуваната оска.

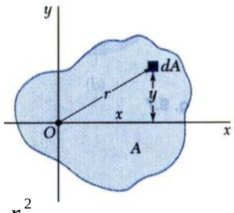


$$I_x = \sum \Delta A_i \cdot y_i^2 \quad ; \quad I_x = \int_A dA \cdot y^2$$

$$I_y = \sum \Delta A_i \cdot x_i^2 \quad ; \quad I_y = \int_A dA \cdot x^2$$

5.6. ПОЛАРЕН МОМЕНТ НА ИНЕРЦИЈА

Поларниот момент на инерција по дефиниција ја претставува сумата на производите од елементарните површини и квадратите од растојанијата на нивните тежишта до некоја разгледувана точка.



$$I_p = \sum \Delta A_i \cdot r_i^2$$

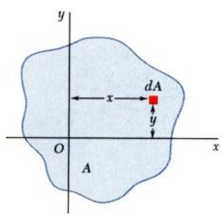
бидејќи $r^2 = x^2 + y^2$

$$I_p = \sum \Delta A_i (x^2 + y^2) = I_x + I_y$$

$$I_p = I_o = \int dA \cdot (x^2 + y^2) = \int dA \cdot x^2 + \int dA \cdot y^2 = I_y + I_x$$

5.7. ЦЕНТРИФУГАЛЕН МОМЕНТ НА ИНЕРЦИЈА

Центрифугален момент на инерција на површина во однос на две ортогонални оски, по дефиниција е сума на производите на елементарните површини и двете растојанија на нивните тежишта во однос на разгледуваните оски.



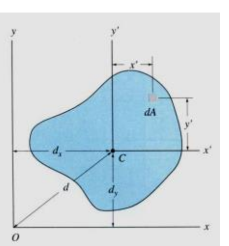
За површини со најмалку една оска на инерција, центрифугалниот момент на инерција е еднаков на нула.

$$I_{xy} = \sum \Delta A_i \cdot x_i \cdot y_i$$

$$I_{xy} = \int_A dA \cdot x \cdot y$$

5.8. ШТАЈНЕРОВА ТЕОРЕМА

Моментот на инерција на површина во однос на некоја оска паралелна со тежишната е еднаков на моментот на инерција на таа површина во однос на сопствената тежишна оска плус производот од површината и квадратот на растојанието помеѓу двете паралелни оски.

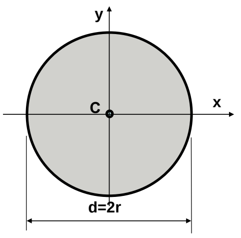


мом. на инерција на површина A во однос на оските x и y се:

$$J_x = \underbrace{J_{x'}}_{\text{сопствен}} + \overbrace{A \cdot d_y^2}^{\text{положбен}} \quad \text{и} \quad J_y = \underbrace{J_{y'}}_{\text{сопствен}} + \overbrace{A \cdot d_x^2}^{\text{положбен}} \qquad J_{xy} = \underbrace{J_{x'y'}}_{\text{сопствен}} + \overbrace{A \cdot d_x \cdot d_y}^{\text{положбен}}$$

5.9. МОМЕНТИ НА ИНЕРЦИЈА ЗА ЕДНОСТАВНИ ФИГУРИ

5.9.1. КРУЖЕН НАПРЕЧЕН ПРЕСЕК

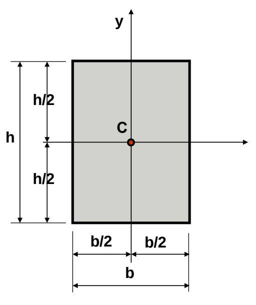


$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$I_{xy} = 0$$

5.9.2. ПРАВОАГОЛЕН НАПРЕЧЕН ПРЕСЕК

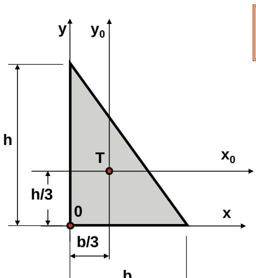


$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

5.9.3. ТРИАГОЛЕН НАПРЕЧЕН ПРЕСЕК



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

$$I_x = I_{x0} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot A$$

$$I_{x0} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

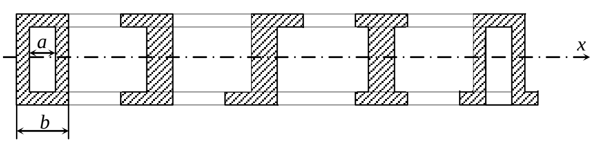
$$I_{x0} = \frac{b \cdot h^3}{36} \qquad I_{y0} = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

5.10. МОМЕНТИ НА ИНЕРЦИЈА ЗА СЛОЖЕНИ ФИГУРИ

За сложени површини кои се состојат од неколку елементарни површини со познати моменти на инерција, вкупниот момент на инерција на таа сложена површина во однос на произволна оска е алгебарска сума на моментите на инерција на сите поодделни површини во однос на истата оска .

$$I_x \quad = \quad I_{x1}[\mathrm{mm}^4] \quad - \quad I_{x2}[\mathrm{mm}^4]$$

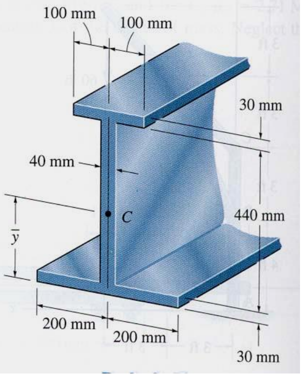
Моментот на инерција на пресекот во однос на било која оска нема да се промени ако целиот пресек или поодделни негови делови паралелно ги придвижиме во правец што е паралелен со таа оска



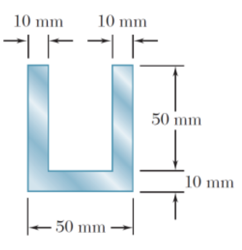
	Designation	Area mm²	Depth mm	Width mm	Axis X-X: $\bar{I}_x$ 10^6 mm⁴	Axis X-X: $\bar{k}_x$ mm	Axis X-X: $\bar{y}$ mm	Axis Y-Y: $\bar{I}_y$ 10^6 mm⁴	Axis Y-Y: $\bar{k}_y$ mm	Axis Y-Y: $\bar{x}$ mm
W Shapes (Wide-Flange Shapes)	W460 × 113†	14400	463	280	554	196.3		63.3	66.3	
	W410 × 85	10800	417	181	316	170.7		17.94	40.6	
	W360 × 57	7230	358	172	160.2	149.4		11.11	39.4	
	W200 × 46.1	5890	203	203	45.8	88.1		15.44	51.3	
S Shapes (American Standard Shapes)	S460 × 81.4†	10390	457	152	335	179.6		8.66	29.0	
	S310 × 47.3	6032	305	127	90.7	122.7		3.90	25.4	
	S250 × 37.8	4806	254	118	51.6	103.4		2.83	24.2	
	S150 × 18.6	2362	152	84	9.2	62.2		0.758	17.91	
C Shapes (American Standard Channels)	C310 × 30.8†	3929	305	74	53.7	117.1		1.615	20.29	17.73
	C250 × 22.8	2897	254	65	28.1	98.3		0.949	18.11	16.10
	C200 × 17.1	2181	203	57	13.57	79.0		0.549	15.88	14.50
	C150 × 12.2	1548	152	48	5.45	59.4		0.288	13.64	13.00

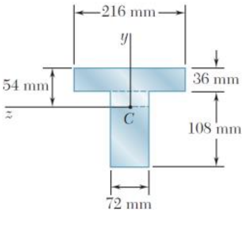
Пример 5.3:

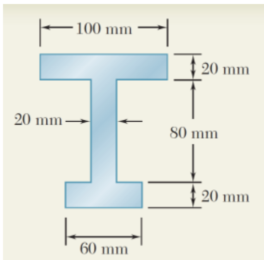
Да се определат аксијалните моменти на инерција за напречен пресек даден на сликата.



Решение 5.3:

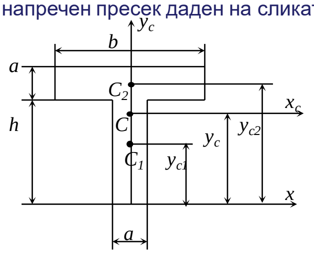






Пример 5.4:

Да се определат аксијалните моменти на инерција за напречен пресек даден на сликата.



***a*=20 (mm),**
b=80 (mm),
h=100 (mm)

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{2000 \cdot 50 + 1600 \cdot (100+10)}{2000+1600} = 76{,}67 \quad \text{(mm)}$$

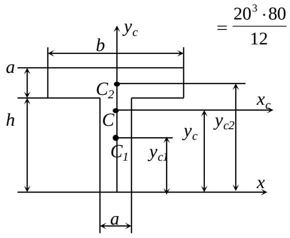
$$\boxed{I_{xc} = I_{xc1} + I_{xc2}}$$

$$I_{xc1} = I_{xc1s} + I_{xc1p} = \frac{a \cdot h^3}{12} + A_1 \cdot (y_c - y_{c1})^2 =$$

$$= \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot (76{,}67 - 50)^2 = 3089245 \quad (mm^4)$$

$$I_{xc2} = I_{xc2s} + I_{xc2p} = \frac{a^3 \cdot b}{12} + A_2 \cdot (y_{c2} - y_c)^2 =$$

$$= \frac{20^3 \cdot 80}{12} + 1600 \cdot (110 - 76{,}67)^2 = 1830755 \quad (mm^4)$$

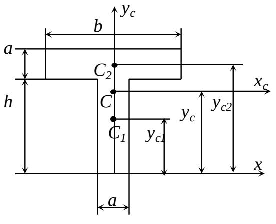


a=20 (mm),
b=80 (mm),
h=100 (mm)

$$I_{yc1} = I_{yc1s} = \frac{a^3 \cdot h}{12} = \frac{20^3 \cdot 100}{12} = 66667 \quad (mm^4)$$

$$\boxed{I_{yc} = I_{yc1} + I_{yc2}}$$

$$I_{yc2} = I_{yc2s} = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{20 \cdot 80^3}{12} = 920000 \quad (mm^4)$$



a=20 (mm),
b=80 (mm),
h=100 (mm)