Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

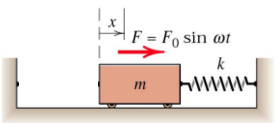
ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО

4. ПРИНУДНИ ОСЦИЛАЦИИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

4.1. ВИБРАЦИИ ПОД ДЕЈСТВО НА ПРИНУДНА СИЛА НА СИСТЕМ БЕЗ ОТПОРИ

Вибрациите кои се предизвикани под дејство на некоја надворешна (нарушувачка) сила F(t) која дејствува на масата се нарекуваат принудни вибрации. Применетата сила или возбудувањето може да биде константна сила, хармониско возбудување, нехармониско но периодично, непериодично или случајно

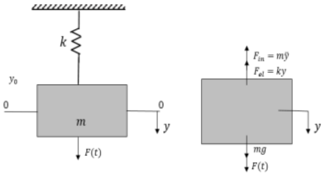


Ако побудната сила $F(t) = Fsin\Omega t$ за диференцијалната равенка на системот се добива:

$$m\ddot{y} + ky = Fsin\Omega t$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F}{m}sin\Omega t$$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \frac{F}{m}sin\Omega t$$



Решението на нехомогената диференцијална равенка е:

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = C_1 sin\omega_n t + C_2 cos\omega_n t$$

$$y_p = Asin\Omega t$$

Вкупното решение во диференцијална равенка е:

$$y = y_h + y_p = (C_1 cos\omega_n t + C_2 sin\omega_n t) + \mathrm{A}\, sin\Omega t$$

Од последниот израз може да се заклучи дека осцилаторното движење на системот е составено од два дела: сопствени осцилации (во првите два члена) и принудни осцилации (во третиот член). Стационарните осцилации предизвикани од хармониското нарушување траат се додека трае дејството на нарушувачката сила и се реализираат според ист закон како и нарушувањето но со амплитуда која зависи од карактеристиките на системот и на нарушувачката сила.

Со замена на партикуларното решение во диференцијална равенка се добива вредноста на амплитудата на стационарните осцилации, односно:

$$A = \frac{F/m}{\omega_n^2 - \Omega^2} \qquad y_p = \frac{F/m}{\omega_n^2 - \Omega^2} sin\Omega t$$

Законот за движење на системот за стационарните осцилации, ќе биде:

$$y = y_p = \frac{F}{m}\frac{sin\Omega t}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{F}{m}\frac{sin\Omega t}{\frac{k}{m}(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2})} = \frac{F}{k}\frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)} sin\Omega t$$

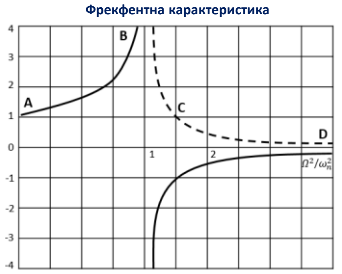
Делот кој го покажува динамичкото дејство на нарушувачката сила се нарекува динамички фактор (динамички коефициент), односно:

$$k_d = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

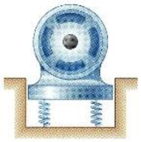
- Кога односот Ω/ω_n е мал, динамичкиот коефициент се стреми кон единица, а амплитудадта кон статичката деформација $A \to y_{st}$, односно дејството на силата е мало.
- Кога односот Ω/ω_n расте, расте и динамичкиот фактор, а за $\frac{\Omega}{\omega_n} = 1$,односно $\Omega = \omega_n$, тој станува бесконечно голем. Во овој случај настанува резонанса.

- Кога односот Ω/ω_n е поголем од еденица, динамичкиот фактор и амплитудата добиваат конечни негативни вредности. За $\Omega/\omega_n = \sqrt{2}$, $k_d = 1$. Доколку односот Ω/ω_n и понатаму се зголемува, динамичкиот коефициент асимптотски се приближува кон нула

Фрекфентна карактеристика



4.2. ПОБУДНА СИЛА ОД ЕКЦЕНТРИЧНА РОТИРАЧКА МАСА

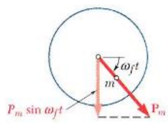


Ако на тело што ротира со n бртежи во минута има екцентрично поставена маса m на растојание r во однос на центарот на ротација, инерцијалната сила од ротирачката маса ќе биде:

$$F_m = ma_n = mr\,\Omega^2$$

каде што аголната брзина е:

$$\omega_f = \Omega = \pi\, n/30$$



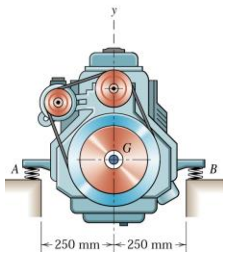
Проекцијата на ротирачката сила по правецот на движење ќе претставува побудна сила со интензитет:

$$F(t) = F_m \sin \Omega t = mr\Omega^2 \sin \Omega t$$

ЗАДАЧА:

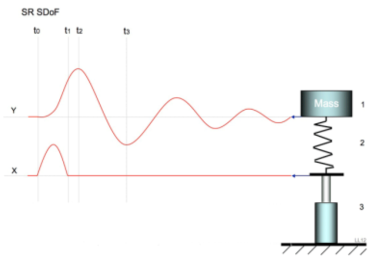
Мотор со маса m = 220 kg е поставен на испитен стол и потпрен на две пружини, секоја со крутост k=100 kN/m и надворешен дијаметар 50mm. Материјалниот момент на инерција на моторот околу центарот G изнесува 2,95 kg m^2. Да се определи:

- Сопствената фреквенција на вертикалните осцилации на системот, за случај моторот да не работи,
- Сопствената фреквенција на осцилациите при ротација околу центарот G, за случај моторот да не работи,
- Бројот на вртежи на моторот N при кој поради појава на небалансирана маса ќе се појават вибрации во резонантно подрачје ако се земат предвид само вертикалните вибрации.



РЕШЕНИЕ:

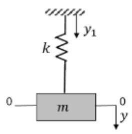
4.3. ВИБРАЦИИ ПОД ДЕЈСТВО НА КИНЕМАТСКА ПОБУДА НА СИСТЕМ БЕЗ ОТПОРИ



Во случаи кога имаме движење на подлогата по некој закон, велиме дека имаме принудни вибрации од кинематска побуда.

Карактеристичен пример е движење на возило по нерамна патна подлога.

Карактеристичен пример на принудни вибрации од кинематска побуда е движењето на возило по нерамна патна подлога.
За случаите кога кинематското нарушување е од хармониска природа, односно $y_1 = a sin\Omega t$, добиваме слична диференцијална равенка како и при фармониска побуда од принудна сила:



$$m\ddot{y} + k(y - y_1) = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \frac{k}{m} a sin\Omega t$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = C_1 sin\omega_n t + C_2 cos\omega_n t$$

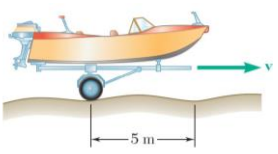
$$y_p = A sin\Omega t$$

Стационарните вибрации на системот ќе бидат:

$$y = y_p = \frac{a}{m}\frac{sin\Omega t}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{a}{m}\frac{sin\Omega t}{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{a}{k}\frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)} sin\Omega t$$

ЗАДАЧА:

Мала приколка со вкупна маса m = 250 kg е потпрена на две пружини, секоја со крутост k = 12 kN/m. Приколката се движи по нерамна подлога која приближно може да се опише со синусна крива со амплитуда a = 40 mm и бранова должина λ = 5 m. Да се определи брзината на која ќе се појави резонанса, како и амплитудата на принудните вибрации при движење со брзина од v = 50 km/h.



Напомена: Фреквенцијата на кинематската побуда се добива од врската $f = v/\lambda$

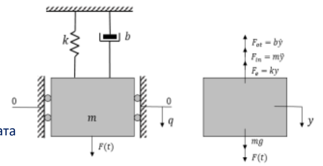
РЕШЕНИЕ:

4.4. ПРИНУДНИ ПРИДУШЕНИ ВИБРАЦИИ

Ако побудната сила $F(t) = Fsin\Omega t$ за диференцијалната равенка на системот се добива:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = Fsin\Omega t$$

$$\ddot{y} + 2\xi\dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{F}{m}sin\Omega t$$



Решението на нехомогената диференцијална равенка е:

$$y = y_h + y_p$$

За стационарен режим движењето на системот е определено со партикуларното решение, односно :

$$y_p = y = C_1 sin\Omega t + C_2 cos\Omega t = Asin(\Omega t - \alpha)$$

Со определување на првиот и вториот извод на хомогеното решение и негова замена во равенката се добива

$$\left(C_1{\omega_n}^2 - C_1\Omega^2 - 2\xi\Omega C_2 - \frac{F}{m}\right)sin\Omega t + (C_2\omega_n^2 - C_2\Omega^2 + 2\xi\Omega C_1)cos\Omega t = 0$$

Ова равенство е задоволено само ако истовремено се задоволени условите:

$$\left(C_1{\omega_n}^2 - C_1\Omega^2 - 2\xi\Omega C_2 - \frac{F}{m}\right) = 0$$

$$(C_2\omega_n^2 - C_2\Omega^2 + 2\xi\Omega C_1) = 0$$

Од решението на равенките се определуваат непознатите интеграциони константи:

$$C_1 = \frac{F}{m}\frac{\omega_n^2 - \Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}$$

$$C_2 = -\frac{F}{m}\frac{2\xi\Omega}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}$$

Вредноста на амплитудата е:

$$A = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2} = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^{\ 2} + 4\xi^2\Omega^2}} = \frac{F}{k}\frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2/\omega_n^2)^{\ 2} + 4\xi^2\Omega^2/\omega_n^2}}$$

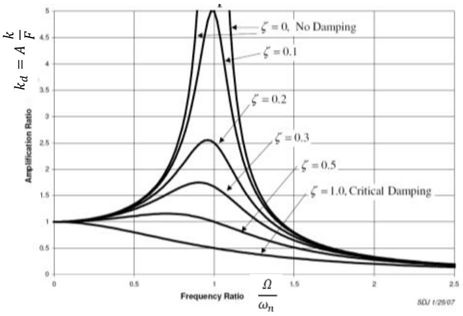
Динамичкиот коефициент k_d покажува колку пати максималното поместување при осцилирањето е поголемо од поместувањето предизвикано од статичко дејство на истата сила.

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2/{\omega_n}^2)^{\ 2} + 4\xi^2\frac{\Omega^2}{{\omega_n}^2}}} \qquad\qquad k_d = A\,\frac{k}{F}$$

Вредноста на фазниот агол е:

$$tg\alpha = -\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\xi\Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

Графичкиот приказ на вредноста на динамичкиот коефицент во зависност од односот на принудната и сопствената фреквенција е даден на сликата за различни вредности на придушувања :



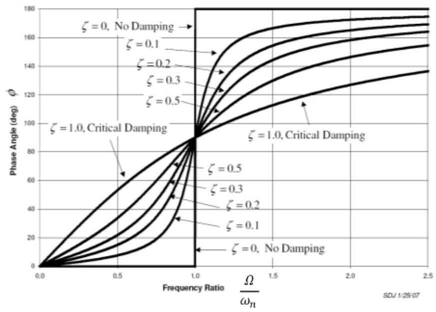
- Од сликата да се воочи дека сите криви се под кривата на нултото придушување, што значи дека со зголемување на придушувањето се намалуваат амплитудите односно побрзо се смируваат осцилациите. Максималните вредности за амплитудите не се постигнуваат за однос на фреквенциите еднаков на 1, туку за нешто помала вредност

- Кога фреквенцијата на нарушувачката сила е мала $\Omega \ll \omega_n$, динамичкиот коефициент се стреми кон единица, односно дејството на бавно променливата нарушувачка сила се сведува на статичко дејство и многу малку зависи од големината на отпорите.

- Влијанието на големината на отпорите е мало и кога $\Omega \gg \omega_n$, тогаш динамичкиот коефициент е помал од единица и неговата вредност и амплитудата асимтотски се приближуваат кон нула.

- Големината на отпорите значително влијае во резонантната зона и тоа кога односот Ω/ω_n е нешто помал од единица.

Графичкиот приказ на вредноста на фазниот агол во зависност од односот на принудната и сопствената фреквенција е даден на сликата за различни вредности на придушувања :



- Кога нема пригушување, силата и поместувањето на масата се во фаза ($\varphi = 0$), односно станува збор за предрезонантната област, додека во резонантното подрачје се во фаза ($\varphi = 180$). Поради тоа кривата на фазниот агол за време на појавата на резонанса покажува дисконтинуитет односно скок.
- Ако пригушувањето е еднакво на нула тогаш аголот φ добива точно вредност 0° или 180°. Останатите криви на графикот го покажуваат фазниот агол за вредности на пригушувањето помеѓу 0 и 1. Може да се забележи дека пригушувањето го ублажува резонантниот скок и во дијаграмот за амплитудита и за фазите.
- Во состојба на резонанса, фазниот агол е 90° независно од пригушувањето.

ЗАДАЧА:

За системот прикажан на сликата да се определи диференцијалната равенка на движење.