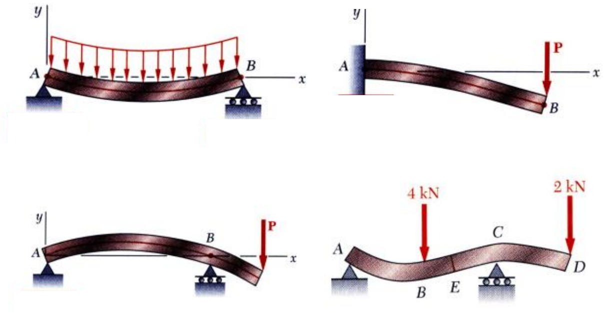
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Машински факултет

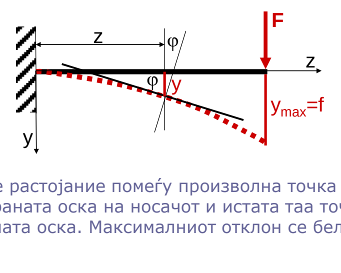
ЈАКОСТ НА МАТЕРИЈАЛИТЕ

8. ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЈА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



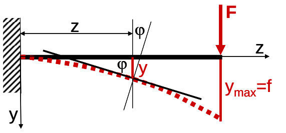
8.1. ПОИМ ЗА ОТКЛОН И НАКЛОН



Отклон (y) е растојание помеѓу произволна точка од недеформираната оска на носачот и истата таа точка на деформираната оска. Максималниот отклон се бележи со “f” (y_{max}=f).

Наклон (φ=y’) е аголот што го заклопува тангентата на кривата во одредена точка со првобитната недеформирана оска, односно тоа е аголот за кој се завртува напречниот пресек после деформирањето.

8.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ЗА ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЈА



$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \pm\frac{M_{x(z)}}{E\cdot I_x}$$

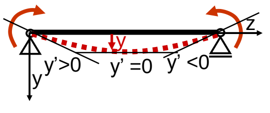
Општ облик на диференцијалната равенка за еластична линија.
- нелинеарна диф. равенка
- важи за големи поместувања

За мали деформации $y'^2 << 1$, за координатен систем поставен како на сликата и за знаци на моментите како што се договорени во статиката:

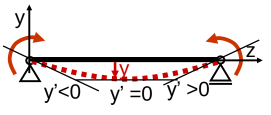
$$y'' = -\frac{M_{x(z)}}{E\cdot I_x}$$

Отклонот (y) е позитивен кога има иста насока како позитивната насока од y - оската.

Наклонот (φ=y') е позитивен ако тангентата на еластичната линија, повлечена од лево кон десно, е наклонета во правецот позитивната y - оска .



$$y'' = -\frac{M_{x(z)}}{E\cdot I_x} \quad \rightarrow +y$$



$$y'' = +\frac{M_{x(z)}}{E\cdot I_x} \quad \rightarrow -y$$

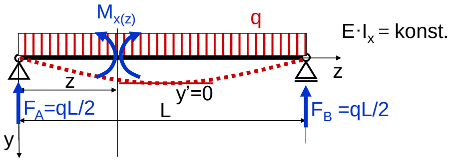
Методот на непосредна интегрирација се состои во двократно последователно интегрирање на диференцијалната равенка

$$y'' = -\frac{M_{x(z)}}{E\cdot I_x}$$

каде што: $M_{x(z)}$ - закон за промена на моментот на свиткување по должина на носачот
E - Јунгов модул на еластичност
I_x – акс.момент на инерција за напр. пресек

При секое интегрирање се јавува по една непозната интеграциона константа. Константите се определуваат со примена на условите за потпирање и условите на познати деформации во карактеристични точки.

8.3. ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЈА ЗА ПРОСТА ГРЕДА ОПТОВАРЕНА СО КОНТИНУИРАН ТОВАР



$$M_{x(z)} = F_A \cdot z - \frac{q\cdot z^2}{2} = \frac{q\cdot\ell}{2}z - \frac{q\cdot z^2}{2}$$

законот за промена на моментот на свиткување

Диференцијалната равенка за деформациите на еластичната линија на гредата се добива:

$$y'' = -\frac{M_{x(z)}}{E\cdot I_x} \quad\Longrightarrow\quad EI_x y'' = -\frac{q\cdot\ell}{2}z + \frac{q\cdot z^2}{2}$$

После **првата интеграција** се добива:

$$EI_x y' = -\frac{q\cdot\ell}{2}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{q\cdot z^3}{6} + C_1$$

општа равенка на наклоните на еластичната линија на гредата

После **втората интеграција** се добива:

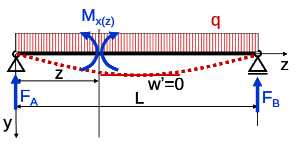
$$EI_x y = -\frac{q\cdot\ell}{2}\cdot\frac{z^3}{6} + \frac{q\cdot z^4}{24} + C_1\cdot z + C_2$$

општ израз за уклоните на еластичната линија на гредата

Интеграционите константи C_1 и C_2 се добиваат од условите на потпирање

За z=0, $y=y_A=0$

За z=L, $y=y_B=0$



Од равенството: $EI_x y = -\frac{q\cdot\ell}{2}\cdot\frac{z^3}{6} + \frac{q\cdot z^4}{24} + C_1\cdot z + C_2$

За z=0, $y=y_A=0$ се добива:

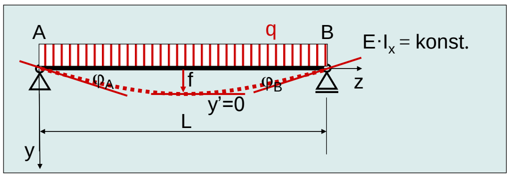
$$0 = -\frac{q\cdot\ell}{2}\cdot\frac{0^3}{6} + \frac{q\cdot 0^4}{24} + C_1\cdot 0 + C_2 \quad\Longrightarrow\quad C_2 = 0$$

За z=L, $y=y_B=0$ се добива:

$$0 = -\frac{q\cdot\ell}{2}\cdot\frac{l^3}{6} + \frac{q\cdot l^4}{24} + C_1\cdot l + 0 \quad\Longrightarrow\quad C_1 = \frac{q\cdot\ell^3}{24}$$

Конечните равенки за деформациите на гредата се:

$$\boxed{y' = \frac{q\cdot\ell^3}{24EI_x}\left[1 - 6\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{\ell}\right)^3\right]} \qquad \boxed{y = \frac{q\cdot\ell^4}{24EI_x}\left[\left(\frac{z}{\ell}\right) - 2\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^4\right]}$$



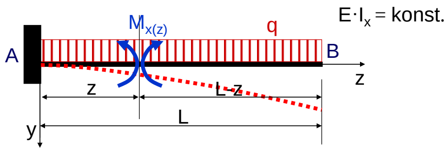
уклонот е максимален таму каде што тангентата на еластичната линија е хоризонтална (y'=φ=0), односно за z=L/2

$$y_{\max} = f = \frac{5 \cdot q \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot I_x}$$

наклонот е максимален на потпорите

(за z=0) $\varphi_A = y'_A = \dfrac{q \cdot \ell^3}{24 \cdot E \cdot I_x}$ (за z=L) $\varphi_B = y'_B = -\dfrac{q \cdot \ell^3}{24 \cdot E \cdot I_x}$

8.4. ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЈА ЗА КОНЗОЛА ОПТОВАРЕНА СО КОНТИНУИРАН ТОВАР



$$M_{x(z)} = -\frac{q \cdot (l-z)^2}{2}$$

законот за промена на моментот на свиткување

Диференцијалната равенка за деформациите на еластичната линија на конзолата е:

$$y'' = -\frac{M_{x(z)}}{E \cdot I_x} \Rightarrow EI_x y'' = \frac{q \cdot \ell^2}{2} - q \cdot \ell \cdot z + \frac{q \cdot z^2}{2}$$

После **првата интеграција** се добива:

$$EI_x y' = \frac{q \cdot \ell^2}{2} z - q \cdot \ell \frac{z^2}{2} + \frac{q \cdot z^3}{6} + C_1$$

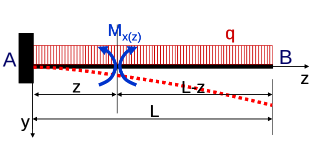
општа равенка на наклоните на еластичната линија на конзолата

После **втората интеграција** се добива:

$$EI_x y = \frac{q \cdot \ell^2}{2} \cdot \frac{z^2}{2} - q \cdot \ell \frac{z^3}{6} + \frac{q \cdot z^4}{24} + C_1 \cdot z + C_2$$

општ израз за уклоните на еластичната линија на конзолата

Интеграционите константи C_1 и C_2 се добиваат од условите на потпирање



За z=0, y=y_A=0 и φ_A=0

Од равенствата за y i y’ се добива:

За z=0, $y'=y'_A=0$ се добива:

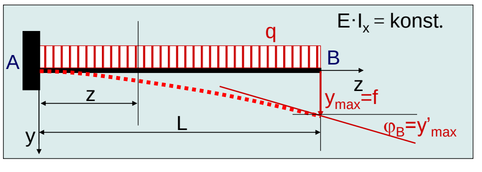
$$0=\frac{q\cdot\ell^2}{2}\cdot 0-q\cdot\ell\frac{0^2}{2}+\frac{q\cdot 0^3}{6}+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$$

За z=0, $y=y_A=0$ се добива:

$$0=\frac{q\cdot\ell^2}{2}\cdot\frac{0^2}{2}-q\cdot\ell\cdot\frac{0^3}{6}+\frac{q\cdot 0^4}{24}+0+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=0$$

Конечните равенки за деформациите на конзолата се:

$$\boxed{y'=\frac{q\cdot\ell^3}{6EI_x}\left[3\left(\frac{z}{\ell}\right)-3\left(\frac{z}{\ell}\right)^2+\left(\frac{z}{\ell}\right)^3\right]} \qquad \boxed{y=\frac{q\cdot\ell^4}{24EI_x}\left[6\left(\frac{z}{\ell}\right)^2-4\left(\frac{z}{\ell}\right)^3+\left(\frac{z}{\ell}\right)^4\right]}$$



уклонот и наклонот се максимални на слободниот крај од конзолата, односно за z=L

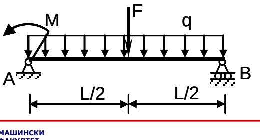
$$\varphi_B=y'_{\max}=\frac{q\cdot\ell^3}{6\cdot E\cdot I_x} \qquad y_{\max}=f=\frac{q\cdot\ell^4}{8EI_x}$$

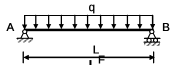
8.5. МЕТОД НА СУПЕРПОЗИЦИЈА

Наклонот и отклонот на еластичната линија во било кој пресек на носачот е еднаков на алгебарскиот збир од наклоните и отклоните на поодделните елементарни оптоварувања во истиот пресек.

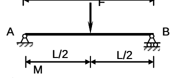
$$y=y_1+y_2+.....+y_n \;; \qquad y'=y'_1+y'_2+.....+y'_n$$

Кога носачот е оптоварен со повеќе товари, деформациите на истиот може да се определат и со примената на методот на суперпозиција

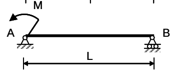




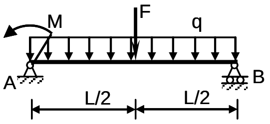
$$y_A'^{(q)} = ...\qquad y_{z=\ell/2}^{(q)} = ...$$



$$y_A'^{(F)} = ...\qquad y_{z=\ell/2}^{(F)} = ...$$



$$y_A'^{(M)} = -.....\qquad y_{z=\ell/2}^{(M)} = -.....$$



$$y_A' = \varphi_A = y_A'^{(q)} + y_A'^{(F)} + y_A'^{(M)}$$

$$y_{z=\ell/2} = y_{z=\ell/2}^{(q)} + y_{z=\ell/2}^{(F)} + y_{z=\ell/2}^{(M)}$$