УНИВЕРЗИТЕТ СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ - СКОПЈЕ

ЗБИРКА ЗАДАЧИ
по
ВЕРОЈАТНОСТ и СТАТИСТИКА

Никола Тунески

СОДРЖИНА

Предговор v

I ВЕРОЈАТНОСТ 1

1 СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ 3
1.1 Простор од елементарни настани. Случајни настани 3
1.2 Класична дефиниција на веројатност 7
1.3 Геометриска веројатност 17
1.4 Условна веројатност. Независни настани.
Веројатност на унија и пресек. 25
1.5 Тотална веројатност. Формули на Бејес 38
1.6 Серија на независни експерименти (шема на Бернули) 47

2 СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ 53
2.1 Дискретни случајни променливи 53
2.2 Непрекинати случајни променливи 60
2.3 Две случајни променливи 70
2.4 Функции од случајни променливи 83

3 КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ И ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ 95
3.1 Карактеристични функции 95
3.2 Закон на големите броеви 102
3.3 Централни гранични теореми 110

II СТАТИСТИКА 119

4 СТАТИСТИЧКИ ОЦЕНКИ 121
4.1 Точкасти оценки 121
4.2 Интервал на доверба за фрекфенцијата
кај серија независни експерименти 129
4.3 Интервал на доверба за математичкото очекување 133
4.4 Интервал на доверба за дисперзијата 141

5 ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ
ЗА ПАРАМЕТРИТЕ НА РАСПРЕДЕЛБАТА 147
5.1 Тестирање на хипотези за фрекфенцијата
кај серија независни експерименти 147
5.2 Тестирање на хипотези за математичкото очекување 153
5.3 Тестирање на хипотези за дисперзијата 163

6 ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ
ЗА ЗАКОНОТ НА РАСПРЕДЕЛБА 169
6.1 Податоци во еднодимензионална табела
(χ^2-тест и тест на Колмогоров) 169
6.2 Податоци во дводимензионална табела 178

7 ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА 187
7.1 Коефициенти на регресијата 187
7.2 Коефициент на корелација 194

ТАБЕЛИ 198

ЛИТЕРАТУРА 207

ПРЕДГОВОР

I

ВЕРОЈАТНОСТ

Глава 1

СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

1.1 ПРОСТОР ОД ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ. СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

1.1.1. Да се определи просторот од елементарни настани при следните експерименти:

а) фрлање на една коцка;

б) фрлање на една монета;

в) фрлање на две монети;

г) фрлање на една коцка и една монета.

Решение.

а) Елементарните настани од овој експеримент се броевите на горната страна на коцката. На тој начин се добива дека просторот на елементарни настани е $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

б) Елементарните настани од овој експеримент се двете страни на монетата, кои вообичаено се означуваат со П-писмо и Г-глава. Така просторот на елементарни настани е $\Omega = \{\text{П}, \text{Г}\}$.

в) Со претходно усвоените ознаки имаме дека просторот на елементарни настани е $\Omega = \{\text{ПП}, \text{ПГ}, \text{ГП}, \text{ГГ}\}$.

г) $\Omega = \{1\text{П}, 2\text{П}, 3\text{П}, 4\text{П}, 5\text{П}, 6\text{П}, 1\text{Г}, 2\text{Г}, 3\text{Г}, 4\text{Г}, 5\text{Г}, 6\text{Г}\}$.

1.1.2. Експериментот се состои во фрлање на две хомогени коцки. Да се определи:

а) просторот од елементарни настани Ω;

б) настанот A: на првата коцка да се појави бројот 3;

в) настанот B: да се појави барем еднаш бројот шест;

г) настанот C: збирот на броевите од двете коцки е 7;

д) настанот D: на обете коцки се појавува број поголем од четири;

ѓ) спротивниот настани на настанот A;

е) пресекот на настаните A и B;

ж) унијата на настаните C и D.

Решение.

а) Елементарните настани од овој експеримент се паровите броеви $(m, n) \equiv mn$, каде m и n се броевите на горната страна на првата и втората коцка, соодветно. На тој начин се добива дека просторот на елементарни настани е

$$\begin{aligned}\Omega = \{(m,n) : m, n = 1, 2, \ldots, 6\} = \\ = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, \\ 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}.\end{aligned}$$

б) $A = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

в) $B = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\}$.

г) $C = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$.

д) $D = \{55, 56, 65, 66\}$.

ѓ) $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$.

е) $A \cap B = \{36, 63\}$.

ж) $C \cup D = \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 55, 56, 65, 66\}$.

1.1.3. Во една кутија се наоѓаат пет нумерирани топчиња. Од кутијата два пати едно по друго се извлекува по едно топче. Да се определи просторот од елементарни настани ако:

а) топчињата се враќаат во кутијата и важен е редоследот на извлечените броеви;

б) топчињата се враќаат во кутијата и редоследот на извлечените броеви не е важен;

в) топчињата не се враќаат во кутијата и важен е редоследот на извлечените броеви;

г) топчињата не се враќаат во кутијата и редоследот на извлечените броеви не е важен.

Решение. Елементарните настани од овој експеримент, слично како во претходната задача, се паровите броеви $(m, n) \equiv mn$, каде m и n се броевите на првото и второто извлечено топче, соодветно. Така, просторот на елементарни настани во секој од наведените случаи е

а) $\Omega = \{(m, n) : m, n = 1, 2, \ldots, 5\}$.

б) $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44, 45, 55\}$.

в) $\Omega = \{12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54\}$.

г) $\Omega = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$.

1.1.4. Да се определи просторот од елементарни настани ако експериментот се сосотои во фрлање на паричка

а) се додека не се појави "писмо";

б) се додека два пати последователно не се појави "писмо".

Решение. Согласно ознаките воведени во решението на задача 1.1.1(б), добиваме дека

а) просторот на елементарни настани е $\Omega = \{\text{П}, \text{ГП}, \text{ГГП}, \text{ГГГП}, \ldots\} \cup \{\omega_0\}$, каде што $\omega_0 = \text{ГГГ}\ldots$ е елементарниот настан никогаш да не се појави писмо;

б) За поголема попрегледност дефинираме множества од елементарни настани A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, такви што, A_i ги содржи елементарните настани: се појавиле i пати "глава" се додека два пати последователно не се појавило "писмо". Односно $A_0 = \{\text{ПП}\}$, $A_1 = \{\text{ГПП}, \text{ПГПП}\}$, $A_2 = \{\text{ГГПП}, \text{ГПГПП}, \text{ПГГПП}, \text{ПГПГПП}, \text{ПГГПП}\}$, и т.н.. На тој начин добиваме дека $\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \cup \{\text{ГГГ}\ldots\}$.

1.1.5. Еден стрелец гаѓа во мета се додека не ја погоди два пати или не ја промаши три пати последователно. Да се определи:

а) просторот од елементарни настани;

б) настанот A: стрелецот да погоди при последното гаѓање;

в) настанот B: стрелецот да промаши при второто гаѓање;

г) настанот C: стрелецот да промаши точно два пати;

д) унијата на настаните B и C.

Решение. Елементарните настани во овој случај се "стрелецот ја погодил метата" и "стрелецот ја промашил метата", за што ќе користиме ознаки 1 и 0, соодветно. На тој начин

а) $\Omega = \{000, 1000, 0100, 0010, 11, 011, 101, 0011, 0101, 1001\}$;

б) $A = \{11, 011, 101, 0011, 0101, 1001\}$;

в) $B = \{000, 1000, 0010, 101, 0011, 1001\}$;

г) $C = \{0011, 0101, 1001\}$; и

д) $B \cup C = \{000, 1000, 0010, 101, 0011, 1001, 0101\}$.

Дополнителни задачи

1.1.6. Експериментот се состои во три фрлања на паричка. Да се определи:

а) просторот од елементарни настани;

б) настанот A: да се појави барем два пати "писмо";

в) настанот B: да се појават помалку од две "писма";

г) пресекот на настаните A и B (какви се тие настани).

1.1.7. Да се опише експериментот на кој одговара следниот простор од елементарни настани

$$\Omega = \{\text{ГГГ, ГГП, ГПГ, ГПП, ПГГ, ПГП, ППГ, ППП}\}$$

(види задача 1.1.6). Да се опишат следните случајни настани:

а) $A = \{\text{ГГГ, ГГП, ГПГ, ГПП}\}$;

б) $B = \{\text{ГГГ, ППП}\}$;

в) $C = \{\text{ГГП, ГПГ, ПГГ}\}$;

г) $D = \{\text{ГГП, ГПГ, ГПП, ПГГ, ПГП, ППГ, ППП}\}$.

1.1.8. Од стандарден шпил од 52 карти се влечат три. Да се определи:

а) просторот од елементарни настани;

б) настанот A: две од извлечените карти се црни, а третата не е поголема од 5;

в) спротивниот настан на настанот A.

1.1.9. Да се определи просторот од елементарни настани при случаен избор на реален број помеѓу два дадени реални броеви a и b.

1.1.10. Еден добавувач прима две независни нарачки во временскиот интервал $[a, b]$. Да се определи соодветниот простор од елементарни настани.

1.1.11. Да се определи просторот од елементарни настани при следните експерименти:

а) студент од шест прашања на испит добива три;

б) студент на пет прашања одговара со точно ($\top$) и неточно ($\perp$);

в) од зборот КНИГА случајно се бираат три различни букви.

1.1.12. Да се определи просторот од елементарни настани за експериментот кој се состои од фрлање на хомогена коцка се додека збирот на регистрираните броеви не биде поголем од три.

1.1.13. Во една кутија има по едно црвено, цино, бело и жолто топче. Да се определи просторот од елементарни настани што се добива кога од кутијата се извлекува по едно топче, без потоа тоа да се врати во кутијата, се до појавата на жолто топче.

1.2 КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

1.2.1. Да се определи веројатноста дека при фрање на две хомогени коцки:

а) на обете ќе се појави ист број;

б) ќе се појават броевите 4 и 6;

в) ќе се појави збир 9;

г) ќе се појави збир 8 или 10;

д) после точно две фрлања ќе се појави бројот 6.

Решение. Просторот на елементарни настани за овој експеримент е даден во решението на задача 1.1.2(а). Секој од елементарните настани има подеднаква веројатност за реализација и затоа добиваме:

а) множеството на поволни настани е $A_1 = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$, а бараната веројатност изнесува $\frac{k(A_1)}{k(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;

б) множеството на поволни настани е $A_2 = \{46, 64\}$, а бараната веројатност изнесува $\frac{k(A_2)}{k(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;

в) множеството на поволни настани е $A_3 = \{36, 45, 54, 63\}$, а бараната веројатност изнесува $\frac{k(A_3)}{k(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;

г) множеството на поволни настани е $A_4 = \{26, 35, 44, 53, 62, 46, 55, 64\}$, а бараната веројатност изнесува $\frac{k(A_4)}{k(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$; и

д) множеството на поволни настани е $A_5 = \{16, 26, 36, 46, 56\}$, а бараната веројатност изнесува $\frac{k(A_5)}{k(\Omega)} = \frac{5}{36}$.

1.2.2. Во една фамилија има две деца.

а) Ако едното од нив е машко, да се определи веројатноста дека другото дете е женско.

б) Ако постарото дете е машко, да се определи веројатноста дека помладото е женско.

Решение. Нека со М и Ж ги означиме случаите кога детето е машко, односно женско. Тогаш во обата случаи просторот од елементарни настани е $\Omega = \{ЖЖ, МЖ, ЖМ, ММ\}$, а множеството од поволни настани за делот под (а) е $A_1 = \{МЖ, ЖМ, ММ\}$ и за делот под (б) е $A_2 = \{ЖМ, ММ\}$. Затоа бараните веројатности се а) $\frac{k(A_1)}{k(\Omega)} = \frac{3}{4}$ и б) $\frac{k(A_2)}{k(\Omega)} = \frac{1}{2}$.

1.2.3. Во еден квиз натпреварувачот треба да одбере една од три врати. Зад една од вратите има автомобил, а зад другите две велосипед. Натпреварувачот ја одбира првата врата а водителот, кој знае зад која врата е автомобилот, отвара една од преостанатите две врати зад која има велосипед и му нуди на натпреварувачот можност да го промени изборот. Да се определи веројатноста натпреварувачот да го добие автомобилот ако

а) тој остане на почетниот избор;

б) тој ја искористи можноста да го промени почетниот избор.

Решение. Нека со А и В ги означиме случаите кога зад една врата има автомобил, односно велосипед.

а) Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{\mathrm{ABB}, \mathrm{BAB}, \mathrm{BBA}\}$, а множеството од поволни настани е $A_1 = \{\mathrm{ABB}\}$. Овде, на пример, BAB, означува дека автомобилот е зад втората врата, а дека зад првата и третата има велосипед. Затоа, бараната веројатност изесува $\frac{k(A_1)}{k(\Omega)} = \frac{1}{3}$.

б) Ако натпреварувачот ја искористи мошноста за промена на изборот, тој всушност ја користи информацијата што ја добива од водителот дека зад отворената врата нема автомобил. Затоа сега имаме ситуација со две затворени врати и зад едната од нив има автомобил. Тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{\mathrm{AB}, \mathrm{BA}\}$, множеството од поволни настани е $A_2 = \{\mathrm{BA}\}$ и бараната веројатност е $\frac{k(A_2)}{k(\Omega)} = \frac{1}{2}$. Значи натпреварувачот треба да ја искористи можноста за промена на изборот.

1.2.4. Двајца студенти се успиваат и каснат на испит. Утредента го замолуваат професорот да им овозможи дополнителен термин за полагање со образложение дека не стасале на време бидејќи им се дупнала гумата на автомобилот. Професорот им излегол во пресрет, ги сместил да полагаат во исто време, во две различни простории и им дал две прашања. Првото било многу едноставно и носело 5 поени, а втрото носело 95 поени и гласело "Која гума се дупна на автомобилот?". За да пложат потребно е двајцата да дадат ист одговор на второто пашање. Колкава е веројатноста дека студентите ќе положат ако претходно не биле договорени за одговорот на второто прашање.

Решение. Да ги означиме тркалата на автомобилот со броевите 1, 2, 3 и 4. Тогаш просторот од елементарни настани се состои од сите парови $(m, n) \equiv mn$, $m, n = 1, 2, 3, 4$, каде првата бројка го означува одговорот на првиот студент, а втората на вториот. Вкупниот број на елементарни настани е $4^2 = 24$. Поволни настани се сите при кои двајцата студенти даваат ис одговор. Тоа се настаните $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ и $(4, 4)$, вкупно 4. Затоа бараната веројатност е $\frac{4}{24} = \frac{1}{4}$.

1.2.5. Од шпил со 52 карти е извлечена една, а потоа уште една карта. Да се определи веројатноста дека во обата случаи е извлечена десетка ако:

а) по првото извлекување картата е вратена во шпилот;

б) по првото извлекување картата не е вратена во шпилот.

Решение.

а) Штом картата по првото извлекување се враќа во шпилот тогаш при двете извлекувања имаме можност да избереме една од 52 карти, па затоа $n = 52^2$. Слично, бројот на поволни можности за избор при обете извлекувања е 4 и $m = 4^2$. Следува $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{169}$.

б) Во овој случај картата по првото извлекување не се враќа во шпилот и затоа при првото извлекување имаме можност да избереме 1 од 52 карти, а при второто 1 од 51 карта. Од тоа следува дека бројот на елементи на просторот од елементарни настани е $n = 52 \cdot 51$. Бројот на поволни можности за избор при првото извлекувања е 4, а при второто 3, бидејќи една десетка веќе е извлечена. Заради тоа $m = 4 \cdot 3$ и бараната веројатност е $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{221}$.

1.2.6. Од шпил со 52 карти се извлекуваат 20, при што секоја извлечена карта се враќа во шпилот. Да се определи веројатноста дека се извлечени по пет карти од секоја од четирите бои.

Решение. При секое извлекување на карта од шпилот имаме 52 можности бидејќи извлечената карта се враќа назад. Затоа вкупниот број на можности (елементарни настани) е $n = 52^{20}$. Понатаму, бидејќи во шпилот има по 13 карти од секоја боја, 4 карти од 13 можат да се изберат на $C_{13}^4 = 715$ начини. Откако се определени по 5 карти од секоја боја (вкупно 20) тие можат да се разместат на $P_{20} = 20!$ начини. Заради тоа бројот на поволни настани е $m = C_{13}^4 \cdot C_{13}^4 \cdot C_{13}^4 \cdot C_{13}^4 \cdot P_{20}$ и бараната веројатност изнесува $\frac{m}{n} \approx 0.00003$.

1.2.7. Нека множеството S се состои од сите шестцифрени броеви чии цифри се 1, 1, 2, 2, 3, 3. Од тоа множество еден по друг се избираат два шестцифрени броја. Да се определи веројатноста на настаните

A: двата броеви ќе започнуваат со 11;

B: барем еден од броевите ќе започнува со 123.

При тоа одделно да се разгледаат случаите кога бројот кој прв се бира се враќа или не се враќа во множеството S.

Решение. Множеството S има $P_{2,2,2}(6) = \frac{6!}{2!2!2!}$ елементи. Од нив со 11 започнуваат $P_{2,2}(4) = \frac{4!}{2!2!}$ броеви, а со 123 започнуваат $P_3 = 3!$ броеви. Ако бројот кој прв се бира се враќа во S тогаш:

$$P(A) = \frac{\left(\frac{4!}{2!2!}\right)^2}{\left(\frac{6!}{2!2!2!}\right)^2} = \frac{1}{225} = 0.00(4)$$

и

$$P(B) = \frac{(3!)^2 + 2 \cdot 3! \cdot \left(\frac{6!}{2!2!2!} - 3!\right)}{\left(\frac{6!}{2!2!2!}\right)^2} = \frac{29}{225} = 0.12(8).$$

Ако бројот кој прв се бира не се враќа во S тогаш:

$$P(A) = \frac{\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{4!}{2!2!} - 1\right)}{\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{6!}{2!2!2!} - 1\right)} = \frac{1}{267} \approx 0.00375$$

и

$$P(B)=\frac{3!(3!-1)+2\cdot 3!\cdot\left(\frac{6!}{2!2!2!}-3!\right)}{\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{6!}{2!2!2!}-1\right)}=\frac{173}{1335}\approx 0.12959.$$

1.2.8. Во една серија од 100 производи има 10 неисправни. За контрола на квалитетот се бираат 15 производи и се проверуваат. Колкава е веројатноста дека меѓу избраните производи има

а) точно еден неисправен;

б) барем два неисправни.

Решение. Од 100 производи бираме 15 и затоа вкупниот број на елементарни настани изнесува $n=C_{100}^{15}$.

а) Бројот на поволни настани се добива кога ќе се соберат сите комбинации што содржат 1 неисправен (од 10 можни) и 14 исправни (од 90 можни) производи. Така се добива дека $m=C_{10}^{1}\cdot C_{90}^{14}$ и бараната веројатност изнесува $\frac{m}{n}\approx 0.35678$.

б) Прво ќе ја определиме веројатноста на спротивниот настан: меѓу избраните производи има нула или еден неисправен. Бројот на поволни настани, на сличен начин како кај делот (а), се добива дека е $m=C_{10}^{0}\cdot C_{90}^{15}+C_{10}^{1}\cdot C_{90}^{14}$. Затоа веројатноста на спротивниот настан изнесува $\frac{m}{n}\approx 0.53755$, а веројатноста што се бара $1-\frac{m}{n}\approx 0.46245$.

1.2.9. На кружна маса по произволен редослед седат $k\geq 3$ луѓе меѓу кои има само двајца кои се познаваат од претходно. Да се определи веројатноста дека тие седат еден до друг.

Решение. *1.начин.* Вкупниот број на елементарни настани, т.е., вкупниот број на кој k луѓе можат да седнат на кружна маса изнесува $n=(k-1)!$. За поедноставување, објаснувањето ќе го дадеме за случајот $k=4$. Во една редица, на правоаголна маса, 4 луѓе можат да седнат на $P_4=4!$ начини. Ако луѓето ги означиме со броевите 1, 2, 3 и 4, тогаш, на следните четири редоследи на седнување на правоаголна маса 1234, 2341, 3412, 4123, одговара еден единствен редослед на седнување на кружна маса, и тоа е редоследот 1234. Значи, има 4 пати помалку редоследи на седнување на 4 луѓе на кружна во однос на правоаголна маса и тој број изнесува $\frac{4!}{4}=(4-1)!=3!$.

Во врска со бројот на поволни настани ја имаме следната анализа. Ако двајцата што кај поволните настани треба да седат еден до друг за момент ги тргнеме на страна, тогаш преостанатите $k-2$ луѓе може да седнат на кружна маса на $(k-3)!$ различни начини. Ако одбереме било кој од тие редоследи на седнување тогаш познаниците може да ги сместиме на $k-2$ места, помеѓу било кои двајца од веќе седнатите. На крајот познаниците може да си ги сменат местата на седење, па секој од досегашните редоследи на седнување генерира уште еден нов редослед. Затоа бројот на поволни настани е $m = (k-3)! \cdot (k-2) \cdot 2 = 2(k-2)!$.

Значи, бараната веројатност е $\frac{m}{n} = \frac{2}{k-1}$.

2.начин. Нека еден од познаниците, да го означиме со A, за момент го тргнеме на страна, а останатите $k-1$ луѓе седнат на кружната маса на произволен начин. Лицето A може да седне помеѓу било кои од веќе седнатите луѓе, на вкупно $n = k-1$ место. Поволни ќе бидат настаните кога лицето A ќе седне лево или десно од неговиот познаник, значи на вкупно $m = 2$ места. Затоа бараната веројатност е $\frac{m}{n} = \frac{2}{k-1}$.

1.2.10. На еден семинар со $k \geq 5$ учесници ручекот е во ресторан со кружни маси. Да се определи веројатноста дека било кои двајца од учесниците нема да седат еден до друг на два последователни ручеци.

Решение. До секој учесник на семинарот може да седне било кој од преостанатите $k-1$ учесници на вкупно V_{k-1}^2 начини. За негови соседи на масата има $k-3$ кандидати бидејќи ги оставаме на страна двајцата кои седеле до него на претходниот ручек. Тие $k-3$ кандидати може да ги распоредиме на вкупно V_{k-3}^2 начини. Од произволноста на учесникот за кој ја спроведовме анализата следува дека бараната веројатност е $\frac{V_{k-3}^2}{V_{k-1}^2} = \frac{1}{(k-2)(k-1)}$.

1.2.11. Еден сервисер на автомобили кој користи филтери за масло од два различни производители во еден момент во магацинот има по $s = 20$ филтри од обата производители. При секоја промена на филтер тој на случаен начин бира една филтер и го монтира. Да се определи веројатноста дека во моментот кога ќе се потрошат филтрите од првиот производител, во магацинот ќе останат $k = 5$ филтери од вториот производител.

Решение. На почетокот во магацинот има вкупно $2s = 40$ филтери. До моментот кога се потрошени сите филтери од првиот производител, а останале $k = 5$ филтери од вториот мошеме да заклучуваме дека биле потрошени вкупно $2s - k = 35$ филтери од магацинот. Изборот на потрошените филтери може да биде направен на вкупно $n = C_{2s}^{2s-k} = C_{40}^{35} = 658008$ начини. Понатаму, биле потрошени $s - k = 15$, од вкупно $s = 20$, филтери од вториот производител. Нивниот избор може да се направи на $m = C_s^{s-k} = C_{20}^{15} = 15504$ начини. Затоа, бараната веројатност е $\frac{m}{n} = \frac{15504}{658008} \approx 0.023562$.

1.2.12. (проблем на Шевалје де Мер) При фрлање на три коцки што е поверојатно: да се добие збир 11 или 12?

Решение. Просторот од елементарни настани се состои од сите тројки (a, b, c), $a, b, c = 1, 2, \ldots 6$, и затоа $n = \overline{V}_6^3 = 6^3 = 216$. Збир 11 од трите коцки може да се добие на следните начини: $1+5+5$, $1+4+6$, $2+3+6$, $2+4+5$, $3+3+5$ и $3+4+4$. Но, бидејќи е важен редоследот на собироците (броевите кои се појавуваат на коцките) имаме $m_1 = 27$ поволни настани. Затоа, веројатноста да се добие збир 11 е $\frac{m_1}{n} = 0.125$. На сличен начин се добива дека за добивање збир 12 има $m_2 = 25$ можности и веројатноста на тој настан е $\frac{m_2}{n} = 0.11574$.

1.2.13. Да се определи веројатноста p_k дека помеѓу k луѓе, $k < 365$, во година која не е престапна, има барем двајца со ист роденден.

Решение. Ќе го разгледаме спротивниот настан: помеѓу k луѓе, $k < 365$, сите да имаат различен роденден. Вкупниот број на елементарни настани се добива кога 365 денови ќе се распределат на k луѓе со можност за повторување. Тоа значи дека $n = \overline{V}_{365}^k = 365^k$. Бројот на поволни елементарни настани се добива кога 365 денови ќе се распределат на k луѓе без можност за повторување, односно $m = V_{365}^k = \frac{365!}{(365-k)!}$. Значи веројатноста на спротивниот настан е $\frac{m}{n}$, а бараната веројатност е

$$p_k = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}.$$

Може да се примети дека $p_{22} \approx 0.467$ и $p_{23} \approx 0.507$, односно, веќе меѓу 23 луѓе е поверојатно дека ќе има двајца со ист роденден, отколку дека нема да има.

1.2.14. Страните на една коцка се нумерирани со броевите $1, 1, 3, 3, 3, 3$, а на друга со броевите $2, 2, 2, 2, 4, 4$. Да се определи веројатноста дека на првата коцка ќе се појави број помал отколку на втората.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega\{12, 14, 32, 34\}$ и настаните 12, 14, 32, 34 може да се реализираат на 8, 4, 16, 8 начини, соодветно. Заради тоа, природно е на тие настани да им придружиме веројатности $\frac{8}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{16}{36}$ и $\frac{8}{36}$. Следува дека за веорјатноата на настанот A, на првата коцка да се појави број помал отколку на втората, се добива $P(A) = \frac{8}{36} + \frac{4}{36} + \frac{8}{36} = \frac{5}{9}$.

1.2.15. Ако на случаен начин се бира патека со должина 12 од точката $O(0, 0)$ до точката $A(5, 7)$ и ако е дозволено движење само по должина на отсечките кои ги спојуваат темињата со целобројни координати и се паралелни со координатните оски, да се определи веројатноста дека патеката ќе помине низ точката $B(3, 3)$.

Решение. На сликата е дадена една од можните патеки од точката O до точката A. Од условот патеката да биде со должина 12, што е еднакво на збирот на координатите на точката A, заклучуваме дека од секоја точка со целобројни координати мораме да се движиме надесно или нагоре, и секоја избрана патека од O до A има 5 единични хоризонтални должини и 7 единични вертикални должини. Затоа вкупниот број на можни патеки од O до A е $n = C_{12}^{7} = C_{12}^{5}$. Бројот на патеки кои проаѓаат низ точката B го определуваме како производ на бројот на патеки од O до B и од B до A, и изнесува $m = C_6^3 \cdot C_6^2$. Значи бараната веројатност е $\frac{m}{n} = \frac{25}{66} = 0.3(78)$.

Дополнителни задачи

1.2.16. Хомогена коцка се фрла два пати. Да се определи веројатноста дека:

а) при второто фрлање ќе се појави парен број;

б) при обете фрлања ќе се појави парен број;

в) при првото фрлање ќе се појави непарен број или бројот 6, а при второто фрлање ќе се појави бројот 3 или 5.

г) при првото фрлање ќе се појави помал број отколку при второто.

1.2.17. Паричка се фрла четири пати. Да се определи веројатноста дека:

а) грб ќе се појави повеќе пати од писмо;

б) писмо ќе се појави точно два пати;

в) писмо ќе се појави повеќе од два пати;

г) писмо ќе се појави парен број пати;

д) при сите четири фрлања ќе се добие ист резултат.

1.2.18. Во играта Лото, каде се извлекуваат 6 од 39 броеви, да се определи веројатноста дека:

а) бројот 23 ќе биде првиот извлечен број;

б) бројот 23 ќе биде во "добитната" комбинација;

в) бројот 23 е прв во "добитната" комбинација.

г) сите броеви во "добитната" комбинација се парни.

1.2.19. Хомогена коцка се фрла два пати. Да се определи веројатноста дека збирот на броевите кои ќе се појават е а) точно пет;

б) помал од пет.

1.2.20. На еден конкурс пријавени се n кандидати. Комисија од три члена е задолжена за вработувањето. Во првата фаза од приемот секој цлен на комисијата одделно ги интервјуира кандидатите и ги рангира од 1 до n. Кандидатот ја поминува првата фаза ако е на прво место кај барем двајца членови на комисијата. Да се опредли веројатноста дека барем еден кандидат ќе ја помине првата фаза ако членовите на комисијата не се во состојба да извршат проценка на кандидатите и рангирањето го вршат по случаен пат.

1.2.21. Да се опредли веројатноста дека во шпил од 52 карти нема две десетки една до друга.

1.2.22. Еден симфониски оркестар на својот репертоар има 30 дела на Хајден, 15 дела на современи автори и 9 дела на Бетовен. Програмата на оркестарот се состои од три дела. Да се опредли веројатноста дека во програмата:

а) првото дело ќе биде на Хајден, второто од севремен автор, а третото од Бетовен;

б) првите две дела ќе бидат на Бетовен , а третото на Хајден;

в) ќе има две дела од современи автори и едно од класици.

1.2.23. Во еден град регистерските броеви на автомобилите се состојат од еден трицифрен број проследен со две букви од абецедата. Да се определи веројатноста дека случајно избран автомобил ќе има регистерски број кај кој што:

а) сите знаци се различни;

б) трите цифри се исти, а буквите се различни.

1.2.24. Да се определи веројатноста дека кај произволно избран шестцифрен телефонски број

а) сите шест цифри ќе бидат различни;

б) ќе завршува на 297.

1.2.25. Хомогена коцка се фрла шест пати. Да се определи веројатноста дека кај сите коцки ќе се појави различен број.

1.2.26. (парадокс на Шевалје де Мер) Да се покаже дека веројатноста за појавување на барем една единица при истовремено фрлање на четири коцки е поголема од веројатноста за појавување на барем две едници при истовремено фрлање на четири коцки.

1.2.27. Од шпил со 52 карти се делат по десет карти на три играчи. Да се определи веројатноста дека првиот и вториот играч ќе добијат по две карти срце, а третиот три карти срце.

1.2.28. Еден автобус вози релација на која застанува на седум станици. Во автобусот влегуваат четири патници. Да се определи веројатноста дека:

а) сите патници ќе излезат од возот на првата станица;

б) ниту еден патник нема да излезе од возот пред втората станица;

в) сите патници ќе излезат од возот на различни станици;

г) барем еден патник ќе излезе од возот на втората станица.

1.2.29. (проблем од преписката на Б. Паскал и П. Ферма започната 1654 година) Играчите A и B играат низа партии од некоја игра. Во секоја партија победува еден од играчите, т.е., нема нерешени партии. За победа во секоја партија се добива еден поен, а за пораз нула. Мечот завршува кога еден од играчите ќе собере шест поени. На почетокот на мечот секој од играчите вложил подеднаква сума пари. Да претпоставиме дека мечот е прекинат при резултат $4:3$ за играчот A. Ако играчите A и B се во целост рамноправни во играта (играат подеднакво добро), во кој однос треба да се подели влогот за поделбата да биде праведна.

1.2.30. Во еден сад се наоѓаат $2n$ црвени и $2n$ сини топчиња. Да се определи веројатноста дека при случаен избор на $2n$ топчиња ќе се добијат n црвени и n сини топчиња.

1.3 ГЕОМЕТРИСКА ВЕРОЈАТНОСТ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

1.3.1. Во сегментот $[0,1]$ од реалната права случајно се избира еден реален број. Да се определи веројатноста дека:

а) ќе биде избран бројот 0.5;

б) ќе биде избран број поблиску до бројот 0.5 отколку до бројот 0;

в) ќе биде избран број поблиску до бројот 0.25 отколку до 0.75;

г) ќе биде избран број на растојание помало од a, $a \in [0, 0.5]$, од бројот 0.5;

д) првата цифра по децималната запирка ќе биде еднаква на 2;

ѓ) сите три цифри по децималната запирка ќе бидат еднакви на 2;

е) сите три цифри по децималната запирка ќе бидат непарни.

Решение. Елементарен настан од овој експеримент е реален број $x \in [0,1]$, а просторот на елементарни настани се состои од сите реални броеви од сегментот $[0,1]$, т.е., $\Omega = [0,1]$.

а) За овој случај множеството на поволни настани е $A_1 = \{0.5\}$, па бараната веројатност е $P(A_1) = \frac{m(A_1)}{m(\Omega)} = \frac{0}{1} = 0$.

б) Поволни настани се реалните броеви $x \in [0,1]$ за кои важи $|x - 0.5| < x$. Решавајќи ја последната неравенка добиваме $x > 0.25$, па множеството на поволни настани е $A_2 = (0.25, 1]$. Затоа $P(A_2) = \frac{m(A_2)}{m(\Omega)} = \frac{1-0.25}{1} = 0.75$.

в) Слично како во делот (б) добиваме дека множеството на поволни настани е $A_3 = \{x \in [0,1] : |x - 0.25| < |x - 0.75|\} = [0, 0.5)$ и $P(A_3) = 0.5$.

г) Бараната веројатност е $2a$. Провери.

д) Бројот $x \in [0,1]$ има прва цифра по децималната запирка еднаква на 2, ако и само ако $x \in [0.2, 0.3)$. Следува дека бараната веројатност е $\frac{0.3-0.2}{1} = 0.1$.

ѓ) Бараната веројатност е 0.001. Провери.

е) Постојат пет непарни едноцифрени броеви, па со тоа и $\overline{V}_5^3 = 5^3 = 125$ троцифрени броеви составени од непарни цифри. Веројатноста секој од тие троцифрени броеви да се појави кај првите три децимали на бројот $x \in [0,1]$, според делот под (ѓ) е 0.001. Затоа одговорот е $125 \cdot 0.001 = 0.125$.

1.3.2. По автопат се движи колона автомобили со брзина u. Должината на секој автомобил е a, ширината е b, а растојанието помеѓу два соседни автомобили е d. На автопатот стапнува желка која се движи со брзина v нормално на правецот на движење на автомобилите. Да се определи веројатноста дека желката неповредена ќе стигне до спротивната страна на автопатот.

Решение. Нека со x го означиме растојанието на желката до првиот автомобил кој доаѓа накај неа во моментот кога таа стапнува на автопатот. Тогаш $0 \leq x \leq a + d$, па просторот на елментарни настани е $\Omega = [0, a + d]$. Желката ќе остане неповредена ако во моментот кога стапнува на автопатот пред неа нема автомобил, т.е., ако $x < d$, и ако до следниот автомобил кој доаѓа накај неа има доволно растојание за таа да помина на спротивната страна, т.е., ако $\frac{b}{v}u < x$. Значи множеството од поволни елементарни настани е $A = \left\{x \in \Omega : \frac{b}{v}u < x < d\right\}$. Следува дека $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{d-\frac{b}{v}u}{a+d} = \frac{dv-bu}{v(a+d)}$.

1.3.3. Во сегментот $[0, 1]$ од реалната права случајно се избираат два реални броеви. Да се определи веројатноста дека:

а) првата цифра по децималната запирка ќе биде еднаква кај двата броеви;

б) првата цифра по децималната запирка кај првиот број е помала од првата цифра по децималната запирка кај вториот број.

Решение. Нека избраните броеви ги означиме со x и y. Тогаш просторот од елементарни настани се состои од точките од квадратот со темиња $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ и $D(0, 1)$, т.е., $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \equiv \{(x, y) : x, y \in [0, 1]\}$.

а) Првата цифра по децималната запирка ќе биде еднаква кај броевите x и y ако и само ако точката $T(x, y)$ припаѓа на затемнетата област на цртеж 2, т.е., ако $(x, y) \in A = [0, 0.1)\times[0, 0.1)\cup[0.1, 0.2)\times[0.1, 0.2)\cup\cdots\cup[0.9, 1)\times[0.9, 1)$. На тој начин добиваме $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{10\cdot 0.1^2}{1^2} = 0.1$.

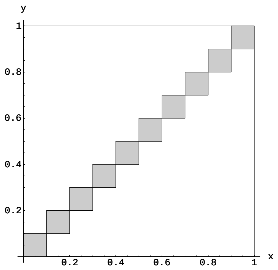
б) Броевите x и y го задоволуваат условот кој е овде поставен ако и само ако точката $T(x, y)$ припаѓа на затемнетата област на цртеж 3. Затоа бараната веројатност е $\frac{(1+2+\cdots+9)0.1^2}{1^2} = 0.45$.

1.3.4. Произволно се избрани два позитивни броеви помали од 2. Да се определи веројатноста дека

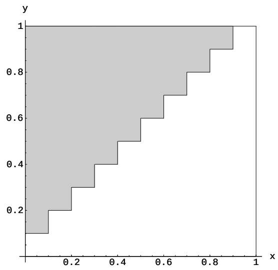
а) збирот ќе биде помал од 1, а производот помал од 2/9;

б) производот ќе биде помал од 1, а количникот помал од 2.

Решение. Нека избраните броеви ги означиме со x и y. Тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ и $m(\Omega) = 2^2 = 4$.

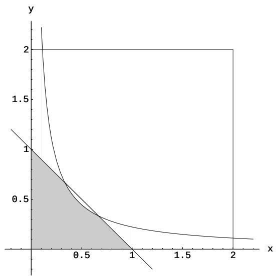


цртеж 2.

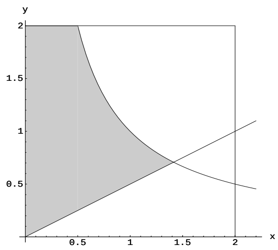


цртеж 3.

а) Множеството од поволни настани е $A_1 = \{(x,y) \in \Omega : x+y < 1, xy < 2/9\}$, т.е., тоа се сосотои од точките од затемнетата област на цртеж 4. Таа се добива на тој начин што прво се цртаат графиците на: $x+y=1$ и $xy=2/9$, а потоа се проверува која од областите добиени со кривите се состои од точки кои ги задоволуваат обете неравенства. Од цртежот може да се заклучи дека плоштината на затемнетиот дел е $m(A_1) = \int_0^{1/3}(1-x)dx + \int_{1/3}^{2/3}\frac{2}{9x}dx + \int_{2/3}^{1}(1-x)dx = \frac{1^2}{2} - \int_{1/3}^{2/3}\left(1-x-\frac{2}{9x}\right)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$. Значи бараната веројатност е $P(A_1) = \frac{m(A_1)}{m(\Omega)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18}\ln 2 \approx 0.12184$.



цртеж 4.

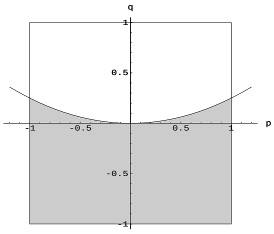


цртеж 5.

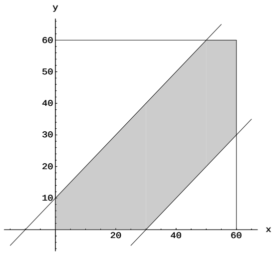
б) Слично како во делот (а), за множествотот од поволни настани добиваме $A_2 = \{(x,y) : xy < 1, x/y < 2\}$ и $m(A_2) = \int_0^{1/2}(2-x/2)dx + \int_{1/2}^{\sqrt{2}}(1/x - x/2)dx$ (види цртеж 5). Затоа $P(A_2) = \frac{1}{8}(1+3\ln 2)$. Провери.

1.3.5. Од сегментот $[-1,1]$ случајно се бираат два броја p и q. Да се определи веројатноста дека квадратната равенка $x^2+px+q=0$ ќе има реални решенија.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = [-1,1] \times [-1,1] = \{(p,q) : p,q \in [-1,1]\}$ и $m(\Omega) = 2^2 = 4$. Дадената квадратна равенка има реални решенија ако и само ако $p^2 - 4q \geq 0$, па затоа множеството од поволни елементарни настани е $A = \{(p,q) \in \Omega : p^2 - 4q \geq 0\}$, т.е., затемнетата област на цртеж 6. За неа имаме $m(A) = \int_{-1}^{1} \frac{p^2}{4} dp = \frac{1}{6}$ од каде следува дека $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{24}$.



цртеж 6.



цртеж 7.

1.3.6. Еден гледач знае дека неговата омилена емисија трае 30 минути и дека започнува и завршува помеѓу 20 и 21 часот. Тој во произволен момент помеѓу 20 и 21 часот седнува пред телевизорот и ја следи програмата континуирано 10 минути. Колкава е веројатноста дека гледачот ќе види барем еден кадар од емисијата.

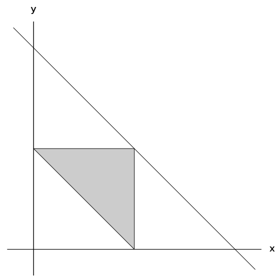
Решение. Нека гледачот седнал пред телевизорот во 20 часот и x минути, а емисијата започнала во 20 часот и y минути. Ако емисијата започнала пред тој да седне пред телевизорот тогаш условот тој да види барем еден кадар е $0 < x - y \leq 30$. Од друга страна, ако емисијата започнала откако гледачот седнал пред телевизорот тогаш соодветниот условот е $0 \leq y - x \leq 10$. (Заедно тоа може да се запише со $10 \leq |x-y| \leq 30$.) Од овде следува дека просторот од елементарни настани е $\Omega = [0,60] \times [0,60] = \{(x,y) : x,y \in [0,60]\}$ и $m(\Omega) = 60^2 = 3600$, а множеството од поволни елементарни настани е $A = \{(x,y) \in \Omega : x - y \leq 30, y - x \leq 10\}$. На цртежот 7 тоа е затемнетата област и нејзината плоштина е $m(A) = 60^2 - \frac{50^2}{2} - \frac{30^2}{2} = 1900$. Затоа $P(A) = \frac{19}{36}$.

1.3.7. Отсечка со должина a поделена е на три дела. Да се определи веројатноста дека од добиените делови може да се конструира триаголник.

Решение. Нека должините на два од трите дела ги означиме со x и y. Тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x + y < a\}$, т.е., Ω се сосоти од точките во правоаголниот триаголник со темиња $O(0,0)$,

$A(a,0)$ и $B(0,a)$. Затоа $m(\Omega) = a^2/2$. Множеството A составено од поволните елементарни настани ќе го определиме користејќи ја теоремата: збирот на било кои две страни на триаголникот е поголем од третата страна. Од овде:

- $x + y > a - x - y \Rightarrow x + y > a/2$;
- $x + a - x - y > y \Rightarrow y < a/2$;
- $y + a - x - y > x \Rightarrow x < a/2$;



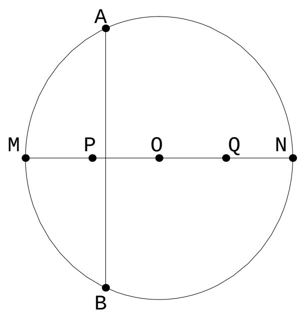
цртеж 8.

односно $A = \{(x,y) \in \Omega : x + y > a/2, y < a/2, x < a/2\}$. Според цртеж 8, каде множеството A е затемнетиот дел, следува дека $m(A) = a^2/8$. На тој начин добиваме дека $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

1.3.8. На случаен начин се избира тетива во кружница со радиус 1. Да се определи веројатноста дека растојанието од центарот на кружницата до тетивата не е поголемо од 1/2. (ова е парадоксот на Ј.Л.Ф. Бертранд, 1822-1900)

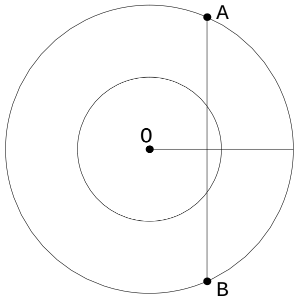
Решение. Оваа задача ќе илустрира дека формулацијата "на случаен начин се избира..." не е доволно прецизена (иако на прв поглед изгледа дека не е така) и со различно нејзино толкување се добива различен резултат.

а) Нека е O центар на кружницата со радиус 1, MN дијаметар на кружницата, а P и Q средини на отсечките OM и ON, соодветно. Под "случаен избор" на тетива во, овој случај, подразбираме избор на тетива AB која е нормална на дијаметарот MN. Растојанието од точката O до тетивата AB не е поголемо од $1/2$ ако и само ако пресекот S на тетивата AB и дијаметарот MN припаѓа на отсечката PQ, цртеж 9. Бараната веројатноста ја определуваме како количник на должината на отсечката PQ и должината на отсечката MN и таа изнесува 1/2.



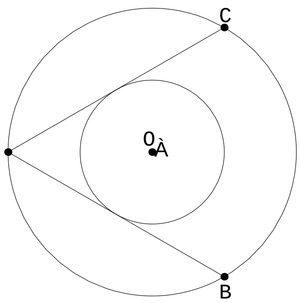
цртеж 9.

б) Под "случаен избор" на тетива подразбираме избор на средината S на тетивата во внатрешноста на кружницата. Центарот на кружницата е на растојание поголемо од $1/2$ од случајно избраната тетива, ако и само ако точката S е во внатрешноста на кружница со радиус $1/2$, која е концентрична на дадената, цртеж 10. Да ја наречеме таа кружница поволна. На обете кружници им одговараат соодветни кругови. Тогаш, веројатноста која не интересира е количник на плоштините на поволниот и дадениот круг, и изнесува $(1/2)^2\pi : (1^2\pi) = 1/4$.



цртеж 10.

в) Нека точките A, B_1 и B_2 ја делат дадената кружница на три еднакви лакови, цртеж 11. Нека претпоставиме дека едниот крај на тетивата е фиксиран и нека е тоа точката A. Под "случаен избор" на тетива подразбираме избор на другиот крај на тетивата. Во тој случај растојанието од центарот на кружницата до тетивата не е подолем од $1/2$ ако и само ако другиот крај на тетивата припаѓа на "поволниот лак" B_1B_2, кој не ја содржи точката A. Тогаш бараната веројатност е количник од должината на "поволниот лак" и целата кружница, па е еднаква на $(2\pi/3) : (2\pi) = 1/3$.

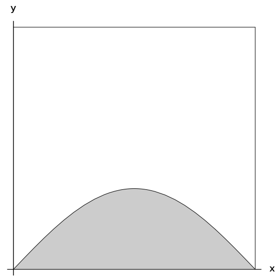


цртеж 11.

1.3.9. Една рамнина е исцртана со паралелни прави што се на растојание $2a$ една од друга. На рамнината произволно се изпушта игла со должина $2l$, $l \leq a$. Да се определи веројатноста дека иглата ќе пресече некоја од паралелните прави. (ова е проблемот на Г.Л. Буфон од 1777 година кога тој земајќи $a = l$ со 10000 фрлања на игла утврдил дека $\pi \approx 3,15$)

Решение. Да го означиме со x аголот што иглата го зафаќа со паралелните прави, а со y растојанието од долниот крај на иглата до првата од паралелните прави што е над тој крај. Тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, \pi), y \in [0, 2a]\}$ и $m(\Omega) = 2a\pi$. Иглата ќе пресече една од паралелните прави ако и само ако $y \leq 2l \sin x$, цртеж ??. Значи множеството поволни елементарни настани е $A = \{(x, y) \in \Omega : y \leq 2l \sin x\}$ и $m(A) = \int_0^\pi 2l \sin x dx = 4l$, цртеж 9. Следува дека $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}$.

цртеж 12.



цртеж 13.

Дополнителни задачи

1.3.10. Праволиниски електричен проводник ги поврзува точките A и B кои се на меѓусебно растојание l. Познато е дека проводникот е прекинат. Колкава е веројатноста дека прекинот е на растојание не поголемо од a од точката A?

1.3.11. На отсечка AB со должина l на случаен начин се избираат две точки M_1 и M_2. Да се определи веројатноста дека:

а) точката M_1 ќе биде поблиску до точката A отколку точката M_2;
б) растојанието меѓу точките M_1 и M_2 ќе биде помало од a;
в) точката M_1 ќе биде поблиску до точката A отколку точката M_2;
г) должината на секоја од добиените отсечки ќе биде помала од a.

1.3.12. Во сегментот $[0, 1]$ на случаен начин се избираат три броеви. Да се определи веројатноста дека третиот избран број ќе биде помеѓу првите два.

1.3.13. Во сегментот $[0, a + b]$ на случаен начин се избираат n броеви. Да се определи веројатноста дека точно k од избраните броеви се во сегментот $[0, a]$.

1.3.14. Во квадратот со темиња $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,1)$ и $C(0,1)$ на случаен начин се избира точка $T(x,y)$. Да се определи веројатноста дека:

а) $x - y > 1$;

б) $y < \sin x$;

в) точката T е во кругот вписан во квадратот $OABC$;

г) точката T е поблиску то темето O отколку до другите темиња.

1.3.15. Да се определи веројатноста дека решенијата на квадратната равенка $x^2 + 2ax + b = 0$ ќе бидат позитивни ако параметрите a и b се избираат случајно така да задоволуваат $|a| < m$ и $|b| < n$.

1.3.16. Во внатрешноста на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$, на случаен начин се бира една точка. Да се определи веројатноста дека точката ќе припаѓа во внатрешноста на:

а) кружницата $x^2 + y^2 = b^2$;

б) квадратот $|x| + |y| = b$.

1.3.17. Два бродови треба да пристигнат во едно пристањште. Нивното време на пристигнување е случајно и со еднаква веројатност во следните 24 часа. Да се определи веројатноста дека еден од бродовите ќе мора да чека другиот да го ослободи пристаништето, ако првиот стои во пристаништето 1 час, а другиот 2 часа.

1.3.18. Во еден сигнализатор пристигнуваат сигнали од два извора во временски интервал T. Пристигнувањето на секој од сигналите е случајно и со еднаква веројатност за секој момент од интервалот T. Сигнализаторот ќе проработи само ако разликата во времето на пристигнување на сигнал од првиот извор и сигнал од вториот извор не е поголема од t. Да се определи веројатноста дека сигнализаторот ќе проработи ако во интевалот T секој од изворите испрати само по еден сигнал.

1.3.19. Во топка со радиус R на случаен начин се избира една точка. Да се определи веројатноста дека ќе биде избрана точка од:

а) коцката вписана во топката;

б) правилниот тетраедар вписан во топката.

1.3.20. Во круг со радиус R на случаен начин се избира една точка. Да се определи веројатноста дека избраната точка ќе биде поблиску до кружната линија отколку до центарот на кругот.

1.3.21. Во круг со радиус R на случаен начин се бираат n точки. Да се определи веројатноста дека растојанието од центарот на кругот до најблиската точка ќе биде поголемо од r.

1.3.22. Во внатрешноста на квадрат со страна a на случаен начин е избрана една точка. Да се определи веројатноста дека растојанието на точката до најблиската страна ќе биде помало од растојанието на точката до најблиската дијагонала.

1.3.23. Подот во една простоеија е поплочен со паркет во форма на правоаголник со страни a и b. На подот произволно се фрла кружна монета со радиус r, при што $2r < a < b$. Да се определи веројатноста дека монетата нема да има заеднички точки со рабовите на било која од плочките паркет.

1.3.24. Една рамнина е исцртана со паралелни прави што се на растојание $2a$ една од друга. На рамнината произволно се фрла кружна монета со радиус $r < a$. Да се определи веројатноста дека монетата нема да пресече ниедна од паралелните прави.

1.4 УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ. НЕЗАВИСНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ НА УНИЈА И ПРЕСЕК.

Основни елементи од теорија

Решени задачи

1.4.1. Да се определи веројатноста дека при две фрлања на коцка ќе се добие збир поголем од седум ако се знае дека:

а) при првото фрлање се појавил бројот 4;

б) при првото фрлање се појавил број поголем од 3;

в) при првото фрлање се појавил бројот 1;

г) при првото фрлање се појавил број помал од 5.

Решение. За овој експеримент просторот од елементарни настани е $\Omega = \{mn : m, n = 1, 2, \ldots, 6\}$. Нека дефинираме настан A: при две фрлања на коцка добиен е збир поголем од седум.

а) Дефинирајќи настан B_1: при првото фрлање се појавил бројот 4, добиваме дека бараната веројатност може да ја пресметаме со формулата за условна веројатност $P(A|B_1) = \frac{P(AB_1)}{P(B_1)}$. Овде, AB_1 е настанот: при две фрлања на коцка добиен е збир поголем од седум и при првото фрлање се појавил бројот 4, т.е., $AB_1 = \{44, 45, 46\}$. Заради тоа $P(A|B_1) = \frac{3/36}{1/6} = \frac{1}{2}$.

б) Ако B_2 е настанот: при првото фрлање се појавил број поголем од 3, тогаш $P(A|B_2) = \frac{P(AB_2)}{P(B_2)}$, каде $AB_2 = \{44, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 62, 63, 64, 65, 66\}$. Затоа $P(A|B_2) = \frac{12/36}{3/6} = \frac{2}{3}$.

в), г) Работејќи слично како во деловите (а) и (б), во обата случаја се добива веројатност 0. Провери.

1.4.2. Од шпил од 52 карти се извлекува една. Да се определи веројатноста дека:

а) е извлечена карта срце, ако се знае дека извлечената карта е црвена;

б) е извлечена карта помала од 10, ако се знае дека извлечената карта е срце;

в) е извлечен џандар, ако се знае дека извлечената карта е црвена.

Решение.

а) Нека ги дефинираме настаните

A: извлечена е карта срце, и

B: извлечена е црвена карта.

Тогаш бараната веројатност е $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, каде AB е настанот: извлечена е црвена карта срце, кој со оглед на тоа што сите карти срце се црвени, е еднаков со настанот C: извлечена е карта срце. Значи $P(A|B) = \frac{P(C)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.

б) Да ги разгледаме настаните

A: извлечена е карта помала од 10, и

B: извлечена е карта срце.

Следува дека бараната веројатност е $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, каде AB е настанот: извлечена е карта срце помала од 10. Затоа $P(AB) = \frac{9}{52}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ и $P(A|B) = \frac{9}{13}$.

в) Слично како во деловите (а) и (б), добиваме дека бараната веројатост е $1/13$. Провери.

1.4.3. Веројатноста дека некој машински дел ќе откаже при првата употреба е 0.1. Ако тој не откаже пти првата употреба, веројатноста дека ќе трае 1 година е 0.99. Колкава е веројатноста дека делот ќе трае една година?

Решение. Дефинирајќи настани

A: делот откажува при првата употреба, и

B: делот трае една година,

за бараната веројатност добиваме $P(B) = P(B|A)P(A) = 0.99 \cdot 0.1$.

1.4.4. Една монета се фрла три пати. При тоа се разгледуваат следните настани:

A: при првото фрлање се појави глава;

B: при второто фрлање се појави писмо;

C: при третото фрлање се појави глава;

D: при сите три фрлања се појави иста страна;

E: при точно едно фрлање се појави глава.

Да се определи:

а) Кои од следните парови настани се независни: (1) A, B; (2) A, D; (3) A, E; (4) D, E;

б) Кои од следните тројки настани се взаемно независни: (1) A, B, C; (2) A, B, D; (3) C, D, E.

Решение. Простор од елементарни настани при овој експеримент е $\Omega = \{\text{ППП}, \text{ГПП}, \text{ПГП}, \text{ППГ}, \text{ПГГ}, \text{ГПГ}, \text{ГГП}, \text{ГГГ}\}$, $k(\Omega) = 8$. Понатаму, за настаните A, B, C, D и E имаме:

$A = \{\text{ГГГ}, \text{ГПГ}, \text{ГГП}, \text{ГПП}\}$,

$B = \{\text{ППП}, \text{ГПП}, \text{ППГ}, \text{ГПГ}\}$,

$C = \{\text{ГГГ}, \text{ГПГ}, \text{ПГГ}, \text{ППГ}\}$,

$D = \{\text{ГГГ}, \text{ППП}\}$,

$E = \{\text{ГПП}, \text{ПГП}, \text{ППГ}\}$.

Од овде следува: $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(D) = 2/8 = 1/4$ и $P(E) = 3/8$.

а) За настанот AB: при првото фрлање се појави глава и при второто писмо, $AB = A \cap B = \{\text{ГПП}, \text{ГПГ}\}$, се добива дека $P(AB) = 2/8 = 1/4 = P(A)P(B)$, што значи дека настаните A и B се независни. Спроведувајќи слична анализа какопретходната се добива дека настаните од парот (2) се независни, а настаните од паровите (3) и (4) се зависни. Провери.

б) Од $ABC = A \cap B \cap C = \{\text{ГПГ}\}$ следува $P(ABC) = 1/8 = P(A) = P(B) = P(C)$, односно настаните од тројката (1) се взаемно независни. Слично се покажува дека настаните од тројките (2) и (3) се зависни.

1.4.5. Се разгледуваат настаните A: од шпил карти е извлечен ас и B: од шпил карти е извлечена карта срце.

а) Дали овие два настани се независни?

б) Дали овие два настани се независни ако во шпилот се додадат 3 џокери?

Решение. Настанот AB се опишува со: од шпил карти е извлечен ас-срце.

а) Според класичната дефиниција на веројатноста $P(A) = 4/52 = 1/13$, $P(B) = 13/52 = 1/4$ и $P(AB) = 1/52 = P(A)P(B)$. Значи настаните A и B се независни.

б) По додавањето на три џандари во шпилот имаме шпил со 55 карти и затоа $P(A) = 4/55$, $P(B) = 13/55$ и $P(AB) = 1/55 \neq P(A)P(B)$. Од овде заклучуваме дека настаните A и B се зависни.

1.4.6. При фрлање на две нумерирани коцки се разгледуваат следните настани:

A: збирот на добиените броеви е парен;

B: бројот кој се појавува на првата коцка е непарен;

C: бројот кој се појавува на втората коцка е непарен.

Дали трите настани се взаемно независни?

Решение. Просторот од елементарни настани при овој експеримент е $\Omega = \{mn : m, n = 1, 2, \dots, 6\}$, а за настаните A, B, C и ABC, имаме:

$$\begin{aligned}
A &= \{11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66\},\\
B &= \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 51, 52, 53, 54, 55, 56\},\\
C &= \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 15, 25, 35, 45, 55, 65\},\\
ABC &= \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}.
\end{aligned}$$

Од овде, $P(A) = P(B) = P(C) = 18/36 = 1/2$ и $P(ABC) = 9/36 = 1/4 \neq 1/8 = P(A)P(B)P(C)$. Значи настаните A, B и C се взаемно зависни.

1.4.7. Од производите во една серија 4% се шкарт, а 75% од оние кои не се шкарт се од прва класа. Да се определи веројатноста случајно избран производ да биде од прва класа.

Решение. Нека ги дефинираме настаните

A: избраниот производ е од прва класа; и

B: избраниот производ е шкарт.

Од условот на задачата $P(B) = 0.04$ и $P(A|\overline{B}) = 0.75$. Затоа, бараната веројатност е $P(A) = P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = 0.75 \cdot 0.96 = 0.72$.

1.4.8. Во една кутија има 5 бели и 11 црни, а во друга 10 бели и 6 црни топчиња. Од двете кутии на случаен начин се извлекува по едно топче. Да се определи веројатноста дека двете топчиња ќе бидат од иста боја.

Решение. Да ги дефинираме настаните

A_i: од $i-$тата кутија извлечено е бело топче и

B_i: од $i-$тата кутија извлечено е црно топче,

$i = 1, 2$. Тогаш настанот: двете извлечени топчиња се од иста боја е всушност настанот $A_1A_2 + B_1B_2$. Јасно е дека настаните A_1 и A_2, B_1 и B_2, A_1A_2 и B_1B_2, се независни. Заради тоа

$$P(A_1A_2 + B_1B_2) = P(A_1A_2) + P(B_1B_2) = P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(B_2) =$$
$$= \frac{5}{16} \cdot \frac{6}{16} + \frac{11}{16} \cdot \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

1.4.9. Во еден технолошки процес се користат три автоматизирани машини. Веројатноста дека во текот на денот нема да биде потребна интервенција кај секоја од трите машини изнесува 0.9, 0.95 и 0.8, соодветно. Да се определи веројатноста дека во текот на еден ден ќе биде потребна интервенција кај сите три машини ако потребата од интервенција кај било која од машините не зависи од состојбата со останатите машини.

Решение. Нека $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.95$ и $p_3 = 0.8$ се трите веројатности дадени во условот на задачата. Заради тоа што потребата од интервенција кај секоја од машините не зависи од состојбата со останатите машини, може да заклучиме дека бараната веројатност е $p = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0.001$.

1.4.10. Се разгледуваат два производители на сијалици. Кај првиот, сијалицата се произведува во три последователни технолошки операции при што веројатноста за добивање шкарт е 0.1, 0.05 и 0.01, соодветно. Вториот производител применува две последователни операции и веројатноста за добивање шкарт кај обете е еднаква, и изнесува 0.07. Понатаму, процентот на сијалици од прва класа, помеѓу исправните сијалици, изнесува 90% кај првиот и 95% кај вториот производител. Кој производител има "поквалитетно" производство, т.е., кај кој од производителите веројатноста за добивање на сијалица од прва класа е поголема?

Решение. Да ги разгледаме настаните

A_i: добиен е шкарт при $i-$тата технолошка операција кај првиот производител, $i = 1, 2, 3$;

B_i: добиен е шкарт при $i-$тата технолошка операција кај вториот производител, $i = 1, 2$;

C_i: помеѓу исправните сијалици произведени кај $i-$тиот производител добиена е сијалица од прва класа, $i = 1, 2$;

D_i: кај $i-$тиот производител добиена е сијалица од прва класа, $i = 1, 2$.

Тогаш, од условот на задачата имаме $P(A_1) = 0.1$, $P(A_2) = 0.05$, $P(A_3) = 0.01$, $P(B_1) = P(B_2) = 0.07$, $P(C_1) = 0.9$ и $P(C_2) = 0.95$. Понатаму, првиот производител дава сијалица од прва класа ако истовремено се реализираат настаните $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ и C_1, т.е., $D_1 = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}C_1$. Од независноста на настаните A_1, A_2, A_3 и C_1 следува

$$P(D_1) = P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}C_1) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(C_1) = 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.99 \cdot 0.9 = 0.761805.$$

Слично за вториот производиел се добива

$$P(D_2) = P(\overline{B_1}\ \overline{B_2}C_2) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})P(C_2) = 0.93 \cdot 0.93 \cdot 0.95 = 0.821655.$$

Од $P(D_2) > P(D_1)$, односно од фактот дека веројатноста за добивање на сијалица од прва класа е поголема кај вториот производител, заклучуваме дека тој има поквалитетно производство.

1.4.11. Ловџиите I, II i III истовремено гаѓаат во целта и веројатноста дека секој од нив ќе погоди е 0.2, 0.4 и 0.8, за секој од ловџиите соодветно. Да се определи веројатноста дека првиот ловџијата

а) ја погодил целта, ако целта ја погодил само еден куршум;

б) ја промашил целта, ако целта ја промашил само еден куршум.

Решение. Да ги дефинираме настаните

A_i: $i-$тиот ловџија ја погодил целта, $i = 1, 2, 3$; и

B: целта ја погодил само еден куршум.

Според условот на задачата $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.4$ и $P(A_3) = 0.8$.

а) Според формулата за условна веројатност, веројатноста која треба да се определи во овој дел е $P(A_1|B) = P(A_1B)/P(B)$.

Настанот A_1B : првиот ловџија ја погодил целта и целта ја погодил само еден куршум, еднаков е со настанот $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}$: првиот ловџија ја погодил целта, а вториот и третиот ја промашиле. Уште повеќе, настаните A_1, A_2 и A_3 се взаемно независни бидејќи ловџиите стрелаат независно еден од друг. Значи, $P(A_1B) = P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.024$.

Спроведувајќи слична анализа и за настанот B добиваме

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3) \\
&= P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3) \\
&= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\
&= 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.472.
\end{aligned}$$

На тој начин се добива дека бараната веројатност е $P(A_1|B) = \frac{0.024}{0.472} = \frac{3}{59}$.

б) Веројатноста дека првиот ловџијата ја промашил целта, ако целта ја промашил само еден куршум, е $P(\overline{A_1}|\overline{B}) = \frac{16}{23}$. Провери.

1.4.12. Од производите што ги изработува еден работник 90% се исправни, 9% се со отстранлив дефект и 1% се со неотстранлив дефект. Работникот изработил три производи. Да се определи веројатноста дека барем еден е исправен и барем еден е со отстранлив дефект.

Решение. Во задачата се бара веројатноста на настанот A: од трите производи барем еден е исправен и барем еден е со отстранлив дефект. Ако ги дефинираме настаните

B: меѓу трите производи нема исправен, и

C: меѓу трите производи нема производ со отстранлив дефект,

тогаш за спротивниот настан на A, т.е., за настанот $\overline{A}$: меѓу трите производи нема исправен или нема производ со отстранлив дефект, важи $\overline{A} = B + C$ и $P(\overline{A}) = P(B) + P(C) - P(BC)$. Понатаму, од условот на задачата за настаните

A_1: изработен е исправен производ,

A_2: изработен е производ со отстранлив дефект, и

A_3: изработен е производ со неотстранлив дефект, имаме $P(A_1) = 90\% = 0.9$, $P(A_2) = 9\% = 0.09$, $P(A_3) = 1\% = 0.01$ и настаните A_1, A_2 и A_3 се взаемно независни. Од овде, бидејќи настанот B не дозволува изработка на исправен производ него го добиваме преку варијации со повторување на настаните $A_@$ и A_3, па може да заклучиме дека

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_2A_2A_2 + A_2A_2A_3 + A_2A_3A_2 + A_3A_2A_2+\\&+ A_3A_3A_2 + A_3A_2A_3 + A_2A_3A_3 + A_3A_3A_3) =\\&= P(A_2)P(A_2)P(A_2) + P(A_2)P(A_2)P(A_3) + P(A_2)P(A_3)P(A_2)+\\&+ P(A_3)P(A_2)P(A_2) + P(A_3)P(A_3)P(A_2) + P(A_3)P(A_2)P(A_3)+\\&+ P(A_2)P(A_3)P(A_3) + P(A_3)P(A_3)P(A_3) =\\&= 0.09^3 + 3 \cdot 0.09 \cdot 0.09 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.01 \cdot 0.01 \cdot 0.09 + 0.01^3 = 0.001.\end{aligned}$$

На сличен начин се добива дека $P(C) = 0.753571$ (во горниот израз настанот B се заменува со C и настанот A_2 со A_1). На крајот, за веројатноста на настанот BC: меѓу трите производи нема исправен производ и нема производ со отстранлив дефект, добиваме $P(BC) = P(A_3A_3A_3) = P(A_3)P(A_3)P(A_3) = 0.01^3 = 0.000001$. Следува

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0.001 + 0.753571 - 0.000001) = 0.24543.$$

1.4.13. Два играчи последователно фрлаат монета при што победува оној што прв ќе добие писмо. Да се определи веројатноста дека ќе победи играчот што фрла а) прв; б) втор.

Решение. Да ги дефинираме настаните

A_i: играчот што почнува прв добива писмо при своето $i-$то фрлање, и

B_i: играчот што почнува втор добива писмо при своето $i-$то фрлање,

$i = 1, 2, \ldots$. Јасно е дека $P(A_i) = P(B_i) = 1/2$, $i = 1, 2, \ldots$.

а) Настанот: победува играчот што фрла прв, еднаков е со настанот

$$A_1 + \overline{A_1}\,\overline{B_1}A_2 + \overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2}A_3 + \cdots .$$

Од овде, заради независноста на настаните A_i и B_j, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, за бараната веројатност добиваме

$$\begin{aligned}P_1 &= P(A_1 + \overline{A_1}\,\overline{B_1}A_2 + \overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2}A_3 + \cdots)\\&= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(\overline{B_1})P(A_2) + P(\overline{A_1})P(\overline{B_1})P(\overline{A_2})P(\overline{B_2})P(A_3) + \cdots\\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots\\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots\\&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

б) Настанот: победува играчот што фрла втор, спротивен е на ннастанот: победува играчот што фрла прв. Затоа веројатноста за негова реализација е $P_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{3}$.

1.4.14. Веројатноста за реализација на настанот A при еден експеримент е $p = 0.3$. Реализацијата на настанот A при секое повторување на експериментот не зависи од реализацијата во претходните експерименти.

а) Да се определи веројатноста p_n дека настанот A прв пат ќе се реализира при n-тото повторување на експериментот.

б) Колку изнесува p_4 и да се протолкува вредноста што се добива.

в) Да се определи веројатноста дека настанот A прв пат ќе се реализира по четвртото повторување на експериментот.

Решение.

а) Настанот A прв пат ќе се реализира при n-тото повторување на експериментот ако и само ако при првите $n-1$ експерименти се реализира спротивниот настан $\overline{A}$ и при $n-$тиот експеримент се реализира настанот A. Затоа бараната веројатност е

$$\begin{aligned} p_n &= P(\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\,\cdots\,\overline{A}}\,A) = \\ &= \underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})\cdots P(\overline{A})}\,P(A) = \\ &= \underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\cdots\cdot(1-p)}\cdot p = (1-p)^{n-1}p = 0.7^{n-1}0.3. \end{aligned}$$

б) $p_4 = 0.7^3 \cdot 0.3 = 0.1029$. Толкување: веројатноста дека настанот A прв пат ќе се реализира при четвртото повторување на експериментот е 0.1029.

в) Веројатноста дека настанот A прв пат ќе се реализира при првото, второто, третото или четвртото повторување на експериментот изнесува $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$. Затоа веројатноста дека настанот A прв пат ќе се реализира по четвртото повторување на експериментот е $1-(p_1+p_2+p_3+p_4) = 0.2401$.

1.4.15. Веројатноста дека во Лондон ќе заврне во текот на денот е $1/2$. Временската прогноза е точна во два од три дена. Ако временската прогноза предвиди дека ќе врне тогаш Џон сигурно носи чадор со себе, а ако предвиди дека нема да врне тој носи чадор со веројатност $2/3$. Да се определи веројатноста:

а) дека Џон не носи чадор, ако е познато дека врне;
б) дека не врне, ако е познато дека Џон носи чадор.

Решение. Нека ги дефинираме настаните
A: надвор врне,
B: временската прогноза е точна,
C: Џон носи чадор и
D: прогнозата предвидува дека ќе врне.

Тогаш, според условот на задачата $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/3$, $P(C|D) = 1$ и $P(C|\overline{D}) = 2/3$.

а) Настанот A е еднаков со настанот $DB + \overline{D}\,\overline{B}$: прогнозата дека ќе врне е точна или прогнозата дека нема да врне е неточна, односно

$$P(A) = P(DB + \overline{D}\,\overline{B}) = P(DB) + P(\overline{D}\,\overline{B}) = P(D)P(B) + P(\overline{D})P(\overline{B}).$$

Претпоследното равенство е точно бидејќи настаните D и B, како и настаните $\overline{D}$ и $\overline{B}$ се независни, а последното равенство е точно бидејќи настаните DB и $\overline{D}\,\overline{B}$ се независни (уште повеќе и дисјунктни). Следува дека $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}P(D) + \frac{1}{3}(1 - P(D))$ и од овде $P(D) = \frac{1}{2}$. Од слични причини

$$\begin{aligned} P(\overline{C}A) &= P(\overline{C}DB + \overline{C}\,\overline{D}\,\overline{B}) = P(\overline{C}DB) + P(\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{B}) = \\ &= P(\overline{C}D)P(B) + P(\overline{C}\,\overline{D})P(\overline{B}) = \\ &= \frac{P(\overline{C}|D)}{P(D)}P(B) + \frac{P(\overline{C}|\overline{D})}{P(\overline{D})}P(\overline{B}) = \\ &= \frac{1 - P(C|D)}{P(D)}P(B) + \frac{1 - P(C|\overline{D})}{P(\overline{D})}P(\overline{B}) = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Понатаму, бараната веројатност е $P(\overline{C}|A) = P(\overline{C}A)/P(A) = \frac{4}{9}$.

б) Настанот C е еднаков со настанот $CD + C\overline{D}$ и настаните CD и $C\overline{D}$ се дисјунктни, а со тоа и независни. Затоа $P(C) = P(CD) + P(C\overline{D}) = \frac{5}{6}$. Слично како во делот (а) имаме дека $\overline{A} = B\overline{D} + \overline{B}D$ и

$$\begin{aligned} P(\overline{A}C) &= P(B\overline{D}C + \overline{B}DC) = P(B\overline{D}C) + P(\overline{B}DC)) = \\ &= P(B)P(\overline{D}C) + P(\overline{B})P(DC)) = \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Така, за бараната веројатност добиваме $P(\overline{A}|C) = P(\overline{A}C)/P(C) = \frac{7}{15}$.

Дополнителни задачи

1.4.16. Една монета се фрла три пати. Да се определи веројатноста дека глава ќе се појави точно три пати ако се знае дека:

а) при првото фрлање се појавила глава;

б) при првото фрлање се појавило писмо;

в) при првите две фрлања се појавила глава;

г) при првите две фрлања се појавило писмо;

д) при првото и третото фрлање се појавила глава.

1.4.17. Една монета се фрла два пати. При тоа се разгледуваат следните настани:

A: при првото фрлање се појави глава;

B: при второто фрлање се појави глава;

C: при двете фрлања се појави иста страна.

Да се покаже дека:

а) настаните A, B и C се независни во парови, но сите заедно не се независни.

б) настанот C е независен од настаните A и B но не и од настанот $A \cap B$.

1.4.18. Нека е даден простор од елементарни настани $\Omega\{a, b, c, d, e, f\}$ со следните веројатности: $P(a) = P(b) = 1/8$ и $P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = 3/16$. Нека A, B и C се следните настани: $A = \{a, d, e\}$, $B = \{a, c, e\}$ и $C = \{a, c, d\}$. Да се покаже дека $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, но дека ниту еден пар од овие настани не се независни меѓу себе.

1.4.19. Две карти се извлекуваат од шпил со 52 карти. Да се определи веројатноста дека втората извлечена карта ќе биде црвена.

1.4.20. Ако $P(\overline{B}) = 1/4$ и $P(A|B) = 1/2$, колку изнесува $P(A \cap B)$?

1.4.21. Нека се дадени два случајни настани A и B, такви што, $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Докажи дека:

а) ако $P(A) > P(B)$ тогаш $P(A|B) > P(B|A)$;

б) $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$;

в) $P((A \setminus B)|B) = 1 - P(A|B)$.

1.4.22. Докажи дека ако настаните A и B се независни тогаш се независни и настаните а) A и $\overline{B}$; б) $\overline{A}$ и $\overline{B}$; в) AC и BC, каде C е произволен настан.

1.4.23. Еден студент отишол на испит знаејќи 85 од 100 прашања. На испитот тој добива четири прашања. Да се определи веројатноста дека студентот:

а) ги знае сите четири прашања;

б) знае точно две прашања;

в) знае барем две прашања.

1.4.24. Во една кутија се наоѓаат 5 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат едно по друго, без враќање, две топчиња. Да се определи веројатноста

а) дека и двете топчиња ќе бидат бели;

б) дека едното топче ќе биде бело, а другото црно.

1.4.25. Играчите A и B играат меч од три партии шах. Веројатностите за победа на играчот A, реми и победа на играчот B се 0.3, 0.5 и 0.2, соодветно. Резултатот на секоја од партиите не влијае на резултатот на следните партии. Да се определи веројатноста дека играчот A ќе победи а) во точно една партија; б) во барем една партија.

1.4.26. Една комисија се состои од три членови. Секојод членовите донесува одлука независно од другите два. Два членови на комисијата донесуваат правилна одлука со веројатност 0.95, а третиот член донесува правилна одлука со веројатност 0.5. Крајната одлука комисијата ја носи со мнозинство гласови. Да се определи веројатноста дека крајната одлука на комисијата ќе биде правилна.

1.4.27. Нумерирана коцка се фрла два пати. Да се определи веројатноста дека збирот на броевите кои се појавиле при тоа е помал од 5, ако се знае дека

а) при првото фрлање се појавил непарен број;

б) ако при обете фрлања се појавиле или два парни или два непарни броеви.

1.4.28. Во еден сад се наогјаат 65 монети од кои една е со писмо од обете страни. На случаен начин се избира една монета од садот и се фрла шест пати. Ако при сите шест фрлања се појави писмо, да се определи веројатноста дека е избрана монетата со две писма.

1.4.29. Настаните A_1, $A_2, \ldots, A_n$ се независни, а нивните веројатности се p_1, $p_2, \ldots, p_n$, соодветно. Да се определи веројатноста на настаните:

а) N_1: реализиран е барем еден од настаните A_1, $A_2, \ldots, A_n$;

б) N_2: реализирани се точно два од настаните A_1, $A_2, \ldots, A_n$;

в) N_3: реализиран е само настанот A_1.

1.4.30. Секој од n туристи влегува во продавница за сувенири со веројатност p и ако влезе во продавницата купува сувенир со веројатност q, независно од одлуката на другите туристи. Да се определи веројатноста дека n-те туристи ќе купат барем еден сувенир.

1.4.31. Во една кутија се наоѓаат 30 топчиња од кои 8 се бели. Од кутијата се извлекува едно топче и ако не е бело се враќа во кутијата и извлекување то се повторува. Да се определи веројатноста дека дури при дваесеттото извлекување ќе се добие бело топче.

1.4.32. Еден кандидат се пријавува на конкурс во фирмите A и B. Тој оценува дека ќе биде примен во фирмата A со веројатноста 0.5, во фирмата B со веројатноста 0.3 и во обете фирми истовремено со веројатност 0.2. Да се определи веројатноста дека кандидатот ќе биде примен во фирмата B ако се знае дека е примен во фирмата A. Дали настанот "примен во фирмата A" е независен од настанот "примен во фирмата B"?

1.4.33. Нумерирана коцка се фрла три пати. Да се определи веројатноста дека барем еднаш се појавил бројот 6, ако се знае дека

а) збирот на броевите кои се појавиле при трите фрлања е поголем од 15;

б) барем при едно фрлање се појавил број различен од 6.

1.4.34. Во една кутија се наоѓаат 5 бели и 5 црни топчиња. Од кутијата одеднаш се извлекуваат три топчиња. Да се определи веројатноста дека барем едно од нив е црно, ако се знае дека е извлечено барем едно бело топче.

1.4.35. Врз основа на статистички податоци познато е дека 5% од луѓето од машки пол и 0.25% од луѓето од женски пол се далтонисти. Да се определи веројатноста дека случајно избрано лице кое е далтонист, ќе биде од машки пол.

1.5 ТОТАЛНА ВЕРОЈАТНОСТ. ФОРМУЛИ НА БЕЈЕС

Основни елементи од теорија

Решени задачи

1.5.1. Во една кутија има 4 бели и 2 црни топчиња, а во друга кутија 2 бели и 4 црни топчиња. Топчињата се разликуваат само по боја. Од првата кутија на случаен начин се извлекуваат 2 топчиња и без гледање се пренесуваат во втората кутија. Потоа од втората кутија на случаен начин се извлекува едно топче. Да се определи веројатноста тоа да е со бела боја.

Решение. Во оваа задача имаме два експерименти: извлекување на две топчиња од првата кутија и потоа извлекување на едно топче од втората кутија. Вториот експеримент се реализира после првиот и реализација на првиот влијае врз реализацијата на вториот експеримент. Затоа, да ги разгледаме настаните

A_1: од првата кутија извлечени се две бели топчиња;
A_2: од првата кутија извлечени се едно бело и едно црно топче;
A_3: од првата кутија извлечени се две црни топчиња;
B : од втората кутија извлечено е бело топче.

Според условот на задачата имаме $P(A_1) = C_4^2/C_6^2 = 6/15$, $P(A_2) = C_4^1C_2^1/C_6^2 = 8/15$ и $P(A_3) = C_2^2/C_6^2 = 1/15$. Понатаму, настаните A_1, A_2 и A_3 се дисјунктни по парови и ги опфаќаат сите можности за реализација на првиот експеримент. Значи условите за примена на формулата за тотална веројатност се исполнети, па затоа

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3).$$

Овде, $P(B|A_1) = 4/8$ бидејќи: ако е реализиран настанот A_1, т.е., ако од првата кутија се извлечени две бели топчиња, тогаш во втората кутија имаме 4 бели и 4 црни топчиња. На сличен начин $P(B|A_2) = 3/8$ и $P(B|A_3) = 2/8$. Затоа $P(B) = 9/18$.

1.5.2. Тројца добавувачи испраќаат резервни делови за автомобили на еден сервис. Првиот добавувач ги задоволува 50% од потребите на сервисот, а другите два добавувачи покриваат по 25% од потребите. Забележано е дека кај деловите од првиот добавувач секој 25-ти е неупотреблив, кај вториот добавувач секој 15-ти и кај третиот секој 18-ти дел. Ако случајно избраниот дел се покажал неупотреблив, колкава е веројатноста тој да е набавен од вториот добавувач?

Решение. Да ги разгледаме настаните

A_i: избраниот предмет потекнува од $i-$тиот добавувач, $i = 1, 2, 3$; и

B: избраниот предмет е неисправен.

Од условот на задачата за овие настани знаеме дека: $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = P(A_3) = 0.25$, $P(B|A_1) = 1/25$, $P(B|A_2) = 1/15$, $P(B|A_3) = 1/18$. Настаните A_1, A_2 и A_3 се дисјунктни по парови и ги опхаќаат сите можности за потекло на избраниот предмет. Затоа, условите за примена на формулите на Бејес се исполнети и за бараната веројатност добиваме

$$\begin{aligned}
P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{25} \cdot 0.5}{\frac{1}{25} \cdot 0.5 + \frac{1}{15} \cdot 0.25 + \frac{1}{18} \cdot 0.25} = \frac{36}{91}.
\end{aligned}$$

1.5.3. Веројатноста за изработка на производ од прва класа во еден процес на работа изнесува 0.96. Системот за контрола на квалитетот што се користи во производството ги има следните карактеристики: ако производот е од прва класа тогаш контролата со веројатност од 0.98 ќе го потврди тоа, но ако призводот не е од прва класа тогаш веројатноста дека системот за контрола ќе згреши и ќе го прогласи производот дека е од прва класа е 0.05.

а) Да се определи веројатноста дека случајно избран производ ќе ја "помине" контролата за квалитет и ќе биде прогласен за производ од прва класа;

б) Да се определи веројатноста дека производ што ја "поминал" контролата, т.е., бил прогласен за производ од прва класа, навистина ги задоволува стандардите.

Решение. Од условот на задачата за настаните

A: избраниот производ е од прва класа, и
B: системот за контрола на квалитетот го прогласува избраниот производ дека е од прва класа,

можеме да заклучиме дека: $P(A) = 0.96$, $P(B|A) = 0.98$ и $P(B|\overline{A}) = 0.05$. Настаните A и $\overline{A}$ се дисјунктни и ги опфаќаат сите можности за квалитетот на избраниот производ. Значи условите на формулата за тотална веројатност и на формулите на Бејес се исполнети, па затоа веројатностите што треба да ги пресметаме се

а) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.9428$, и
б) $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \approx 0.99788$.

1.5.4. По еден двонасочен пат еден кон друг се движат два автомобила. Веројатноста дека безбедно ќе се разминат ако двајцата возачи се со возачко искуство е 0.999, ако едниот возач е почетник веројатноста е 0.7, а ако двајцата возачи се почетници веројатноста е 0.4. Да се определи веројатноста дека двата автомобили безбедно ќе се разминат ако се знае дека секој стотти возач е почетник.

Решение. Нека ги дефинираме настаните
A_1: двајцата возачи се со возачко искуство;
A_2: едниот возач е со возачко искуство, а другиот е почетник;
A_3: двајцата возачи се почетници;
B_i: $i-$тиот возач е почетник, $i = 1, 2$; и
C: возачите безбедно ќе се разминат.

Според условот на задачата $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{100} = 0.01$, $P(C|A_1) = 0.999$, $P(C|A_2) = 0.7$ и $P(C|A_3) = 0.4$. Настаните A_1, A_2 и A_3 се дисјунктни по парови и ги опфаќаат сите можности за возачкото искуство на два возачи. Затоа, од формулата за тотална веројатност, за веројатноста на настанот C добиваме

$$P(C) = P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) + P(C|A_3)P(A_3). \tag{1.1}$$

Од дефиницијата на настаните A_i, $i = 1, 2, 3$, B_i, $i = 1, 2$, следува $A_1 = \overline{B_1}\ \overline{B_2}$, $A_2 = B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2$ и $A_3 = B_1B_2$. Настаните B_1 и B_2 се независни (уште повеќе и дисјунктни) па затоа $P(A_1) = P(\overline{B_1}\ \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}) = 0.9801$. На сличен начин се добива дека $P(A_2) = 0.0198$ и $P(A_3) = 0.0001$. Со замена на вредностите во (1.1) добиваме дека веројатноста двата автомобили безбедно да се разминат е $P(C) \approx 0.993$.

1.5.5. На еден испит секој студент треба да одговори на 3 случајно избрани прашања од вкупно 10 можни. Од 20 студенти кои дошле да полагаат, 10 ги знаат одговорите на сите прашања, 5 студенти го знаат одговорот на 5 прашања, а останатите 5 го знаат одговорот само на 3 прашања. Ако случајно избран студент ги знаел одговорите на сите 3 прашања, да се определи веројатноста дека тој е од групата студенти кои го знаат одговорот само на 3 прашања.

Решение. Студентите кои дошле да го полагаат испитот може да ги поделиме во три групи, и тоа, прва група: студенти што ги знааат одговорите на сите прашања, втора група: студенти што ги знааат одговорите на 5 прашања и трета група: студенти што ги знааат одговорите на 3 прашања. Сега да ги разгледаме настаните

A_i: избран е студент од $i-$тата група, $i = 1, 2, 3$; и

B: избран е студент кои ги знаел одговорите на сите три поставени прашања.

Од условот на задачата следува дека $P(A_1) = 10/20 = 0.5$, $P(A_2) = P(A_3) = 5/20 = 0.25$ и уште повеќе, настаните A_1, A_2 и A_3 се дисјунктни по парови и ги опваќаат сите можности во поглед на групата на која припаѓа случајно избраниот студент. Понатаму, ако избраниот студент припаѓа на првата група тогаш веројатноста дека ќе ги знае одговорите на трите поставени прашања е $P(B|A_1) = C_{10}^3/C_{10}^3 = 1$, ако пак припаѓа на вторта група тогаш веројатноста дека ќе ги знае одговорите на трите поставени прашања е $P(B|A_2) = C_5^3/C_{10}^3 = 10/120 = 1/12$ и аналогно $P(B|A_3) = C_3^3/C_{10}^3 = 1/120$. Затоа, според формулите на Бејес, за бараната веројатност имаме

$$
\begin{aligned}
P(A_3|B) &= \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{120} \cdot 0.25}{1 \cdot 0.5 + \frac{1}{12} \cdot 0.25 + \frac{1}{120} \cdot 0.25} = \frac{??}{??} \approx 0.00398.
\end{aligned}
$$

1.5.6. Еден лекар смета дека пациентот е болен од една од болестите b_1, b_2 или b_3. Пред да спроведе тестирање тој претпоставува дека веројатноста пациентот да е болен од секоја од трите болести е подеднаква. Тестот што го спроведува дава позитивен резултат со веројатност 0.8 ако пациентот е болен од болеста b_1, 0.6 ако е болен од болеста b_2 и 0.4 ако е болен од болеста b_3. Ако резултатот на тестот е позитивен колкава веројатност треба лекарот да додели на секоја од трите болести?

Решение. Да ги дефинираме настаните

A_i: пациентот е болен од болеста b_i, $i = 1, 2, 3$; и

B: тестот е позитивен.

Лекарот претпоставува подеднаква веројатноста за настаните A_1, A_2 и A_3, т.е., $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Понатаму, настаните A_1, A_2 и A_3 се дисјунктни по парови и ги опваќаат сите можности за болеста на пациентот. Ако пациентот е болен од болеста b_1 тогаш тестот дава позитивен резултат со веројатност 0.8 и затоа $P(B|A_1) = 0.8$. Слично $P(B|A_2) = 0.6$ и $P(B|A_3) = 0.4$. Конечно, според формулитена Бејес, ако тестот е позитивен тогаш за веројатноста пациентот да е болен од болеста b_1 добиваме

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.8 \cdot \frac{1}{3}}{0.8 \cdot \frac{1}{3} + 0.6 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Слично за болестите b_2 и b_3 имаме

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{1}{3}$$

и

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{2}{9}.$$

1.5.7. За барање на еден изгубен авион ангажирани се 10 хеликоптери. Секој од хеликоптерите пребарува во еден од два реони во кои може да се наоѓа авионот и го пронаоѓа со веројатност 0.2. Авионот се наоѓа во првиот реон со веројатност 0.8, а во вториот со веројатност 0.2. Како треба да се распоредат хеликоптерите по реони за веројатноста авионот да биде пронајден биде најголема и колкава е таа веројатност? Се смета дека пребарувањето на секој од хеликоптерите е независно од останатите.

Решение. Да ги дефинираме настаните

A_i: авионот се наоѓа во $i-$тиот реон, $i = 1, 2$;
B: авионот е пронајден, и
C_i: авионот е пронајден од $i-$тиот хеликоптер, $i = 1, 2, \dots, 10$.

Настаните A_1 и A_2 се дисјунктни, ги опфаќаат сите можности за тоа каде се наоѓа изгубениот авион и $P(A_1) = 0.8$, $P(A_2) = 0.2$. Од овде, според формулата за тотална веројатност, веројатноста авионот да биде пронајден е

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2).$$

Сега, нека претпоставиме дека првиот реон го пребаруваат n, $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$, а вториот $10 - n$ хеликоптери. Ако авионот е изгубен во првиот реон тогаш веројатноста тој да биде пронајден е

$$P(B|A_1) = P(C_1 C_2 \cdots C_n) = P(C_1)P(C_2) \cdots P(C_n) = 0.2^n.$$

Ова е точно бидејќи според условот на задачата настаните $C_1, C_2, \ldots, C_n$ се взаемно независни и $P(C_i) = 0.2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На сличен начин се добива дека $P(B|A_2) = 10^{10-n}$ и затоа $P(B) = 0.2^n \cdot 0.8 + 0.2^{10-n} \cdot 0.2$. Овој израз добива најголема вредност за $n = 8$ (овде имаме во предвид дека $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$), па следува дека веројатноста за наоѓање на изгубениот авион е најголема ако во првиот реон пребаруваат 8, а во вториот 2 хеликоптери.

1.5.8. Во една партија покер, играчот I има многу силни карти и го зголемува влогот. Веројатноста дека играчот II има посилни карти е 0.04. Ако играчот II има посилни карти тој го зголемува влогот со веројатност 0.9, но ако има послаби карти го зголемува влогот со веројатност од само 0.1. Ако играчот II го зголемил влогот, да се определи веројатноста дека тој има посилни карти од играчот I.

Решение. За настаните

A: вториот играч има посилни карти, и

B: вториот играчот го зголемил влогот,

од условот на задачата следува дека $P(A) = 0.04$, $P(B|A) = 0.9$ и $P(B|\overline{A}) = 0.1$. Па, според формулите на Бејес

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.9 \cdot 0.04}{0.9 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.96} = \frac{3}{11}.$$

Дополнителни задачи

1.5.9. Во една продавница на првата полица се наоѓаат 7 монитори, а на друга 5 монитори. На секоја полица се наоѓа по 1 неисправен монитор. Од првата полица на случаен начин се бира еден монитор и се префрла на фтората полица. Потоа еден купувач одбира монититор од втората полица. Да се определи веројатноста дека тој ќе биде неисправен.

Решение.

1.5.10. Помеѓу болните во една специјализирана болница 50% ја имаат болеста A, 30% болеста B и 20% болеста C. Веројатностите за потполно излекување од болестите A, B и C се 0.7, 0.8 и 0.9, соодветно. Еден од болните во еден момент ја напушта болницата сосема излекуван. Да се определи веројатноста дека тој боледувал од болеста A?

1.5.11. Во една кутија има 3 бели и 4 црни топчиња, а во друга 5 бели и 3 црни. Топчињата се разликуваат само по боја. Од првата кутија на случаен начин се извлекуваат две, а од втората едно топче и сите, без гледање, се ставаат во трета, празна кутија. На крајот, на случаен начин се извлекува едно топче. Да се определи веројатноста тоа да е со бела боја.

1.5.12. Болеста X ја има 1% од луѓето. Тестот за нејзино откривање не е совршен и за болни од болеста X тестот е позитивен во 90% од случаите, а за луѓе кои не се болни од оваа болест тестот е позитивен во 10% од случаите. Да се определи веројатноста

а) случајно избран човек да има позитивен резултат на тестот;

б) ако тестот дал позитивен резултат, испитаниот навистина да е болен од болеста X.

1.5.13. Дигиталниот пренос на податоци се реализира со пренос на низи од нули и единици. Познато е дека при преносот нула се појавува 5 пати почесто од единица. Заради несовршеност на опремата за пренос веројатноста дека нула ќе биде примена како единица е 0.01, а веројатноста дека единица ќе биде примена како нула е 0.05. Да се определи веројатноста

а) дека е испратена нула, ако е примена нула;

б) дека е испратена единица, ако е примена единица.

1.5.14. Во една пратка процесори која се состои од 15 кутии има 1% процесори од втора класа. Во друга пратка од 25 кутии има 5% процесори од втора класа. Да се определи веројатноста дека од случајно избрана кутија е избран процесор од втора класа.

1.5.15. Еден од четворица пријатели добива некоја информација која во облик на сигнал "да" или "не" ја соопштува на другиот, овој на ист начин ја пренесува информацијата на третиот и овој на четвртиот. Познато е дека секој од нив ја пренесува информацијата точно во 1/3 од случаите. Да се определи веројатноста дека првиот пренел информација "да", ако четвртиот примил информација "да".

1.5.16. Во една луксузна продавница се продаваат џемпери од два производители. Првиот производител покрива 65% од потребите на продавницата, а вториот 35% од потребите. На стандардите на продавницата одговараат 95% од џемперите од првиот производител и 90% од џемперите од вториот производител. Да се определи веројатноста

а) дека случајно избран џемпер од продавницата одговара на нејзините стандарди;

б) дека случајно избран џемпер кој одговара на стандардите на продавницата, потекнува од првиот производител.

1.5.17. Од една кутија со m бели ($m \geq 3$) и n црни топчиња изгубено е едно топче со непозната боја. Да се опредли веројатноста дека е изгубено топче со бела боја ако при случаен избор на две топчиња од кутијата се добиени две бели топчиња.

1.5.18. Тројца стрелци погодуваат мета со веројатност 0.2, 0.4 и 0.9. Да се определи веројатноста

а) дека случајно избран стрелец ќе ја погоди метата;

б) дека метата ќе биде погодена, ако сите три стрелци гаѓале со по еден куршум;

в) дека метата ја погодил првиот стрелец, ако гаѓале сите тројца, а метата е погодена само еднаш.

1.5.19. Хомогена коцка се фрла четири пати. Да се определи веројатноста дека збирот на броевите што ќе се појават при првите две фрлања ќе биде помал од збирот на броевите што ќе се појават при вторите две фрлања.

1.5.20. На две полиња од шаховска табла поставени се дами. Да се определи веројатноста дека двете дами ќе се "гаѓаат" меѓу себе.

1.5.21. Во една кутија се наоѓаат n топчиња со непозната боја. Прво, во кутијата се додава едно бело топче, а потоа на случаен начин се извлекува едно топче. Да се определи веројатноста дека тоа ќе биде со бела боја. Што се случува со веројатноста кога бројот n се зголемува?

1.5.22. Во една кутија се наоѓаат црвена, сина и зелена коцка. Страните на црвената коцка се нумерирани со броевите од 1 до 6, страните на сината коцка се нумерирани со броевите од 2, 4 и 6 (по две страни со ист број) и кај зелената коцка на сите шест страни се наоѓе бројот 6. На случаен начин се избира една коцка и се фрла три пати. Да се определи веројатноста

а) дека е избрана зелената коцка, ако при сите три фрлања се појавил бројот 6;

б) дека при трите фрлања по еднаш се појавиле броевите 2, 4 и 6.

1.5.23. Еден пушач се решил да престане да пуши. Познато е дека, ако еден ден не запали цигара, веројатноста дека следнит ден ќе запали е 0.3. Во спротивно, ако еден ден запали цигара, веројатноста дека следниот ден нема да запали цигара е 0.9. Да се определи веројатноста дека n-тиот ден нема да запали цигара. Што се случува кога n се зголемува?

1.6 СЕРИЈА НА НЕЗАВИСНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ (шема на Бернули)

Основни елементи од теорија

Решени задачи

1.6.1. Екипите X и Y играат во финалето на една кошаркарската лига и победува екипата која прва ќе стигне до 4 победи. Да се определи веројатноста дека екипата X ќе победи во финалето ако е познато дека таа победува во секој поеднечен натпревар со веројатност 0.6.

Решение. Да ги дефинираме следните настани:

A_i: екипата Y победила на i натпревари, $i = 0, 1, 2, 3$; и

B: екипата X е севкупен победник во финалето.

Од условот на задачата следува дека екипата X е севкупен победник во финалето ако се реализира еден од настаните A_0, A_1, A_2 или A_3, кои се взаемно независни. Затоа, $P(B) = P(A_0+A_1+A_2+A_3) = P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$. Понатаму, настанот A_i, $i = 0, 1, 2, 3$, е всушност серија од $4+i$ независни натпревари при што екипата X победува со веројатност $p = 0.6$ и губи со веројатност $1 - p = 0.4$. Од тие причини $P(A_i) = \binom{4+i}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^i$ и

$$P(B) = \binom{4}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^0 + \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^1 + \binom{6}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^2 + \binom{7}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^3,$$

т.е., $P(B) = 0,990144$.

1.6.2. Кој од следните настани е со најмала веројатност:

A: да се појави барем една шестка при 6 фрлања на коцка;

B: да се појават барем две шестки при 12 фрлања на коцка;

C: да се појават барем три шестки при 18 фрлања на коцка?

Решение. Да је определиме веројатноста на настанот A. Овде се работи за серија од шест фрлања на коцка кои се независни помеѓу себе, а веројатноста да се појави бројот 6 при секое фрлање на коцката е $p = 1/6$. Затоа, за спротивниот настан на настанот A (тоа е настанот $\overline{A}$: да не се појави шестка при 6 фрлања на коцка), имаме $P(\overline{A}) = \binom{6}{0}p^0(1-p)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Од овде, за веројатноста на настанот A имаме $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.66510$. На сличен начин се добива дека

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left[\binom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} + \binom{12}{1} p^1 (1-p)^{11}\right] =$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.61867$$

и

$$P(C) = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{18} + 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} + 153 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16}\right] \approx 0.59735.$$

Следува дека најмала веројатност за реализација има настанот C.

1.6.3. Дадени се два концентрични круга со радиуси $r = 5$ и $R = 10$. На случаен начин се бираат $n = 10$ точки во поголемиот круг. Да се определи веројатноста дека $k = 8$ од тие точки ќе лежат во помалиот круг.

Решение. Согласно геометриската веројатност, веројатноста секоја од случајно избраните точки од поголемиот круг да лежи во помалиот е количник на нивните плоштини и изнесува $p = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \frac{r^2}{R^2} = 0.25$. Бидејќи оваа веројатност е иста за сите точки, следува дека веројатноста во помалиот круг да лежат $k = 8$ точки е $\binom{n}{k} p^k (1-p)n - k = \binom{10}{8} 0.25^8 0.75^2 \approx 0.000386$.

1.6.4. Да се определи веројатноста дека при $2n$ фрлања на монета n пати ќе се појави писмо и n пати ќе се појави грб. Како се менува таа веројатност со промена на n?

Решение. Разгледуваме серија од $2n$ експерименти при што очекуваме n пати да се појави писмо (тоа повлекува дека n пати ќе се појави глава). Веројатноста за појавување на писмо при секое фрлање на монетата (експеримент) изнесува $p = \frac{1}{2}$. Затоа бараната веројатност е $P(n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$. Понатаму,

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{1}{2^{2n}}} = (n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right) > 1,$$

односно $P(n+1) > P(n)$, за $n \in \mathbb{N}$. Од овде следува дека веројатноста расте со зголемувањето на n.

1.6.5. Поседуваме три нехомогени монети такви што веројатноста за појава на писмо кај секоја од нив е 0.4, 0.7 и 0.8, соодветно. На случаен начин избрана е една од монетите, фрлена е осум пати и при тоа три пати се појавило писмо. Да се определи веројатноста дека е избрана втората монета.

Решение. Да ги разгледаме следните настани

A_i: избрана е $i-$тата монета, $i = 1, 2, 3$; и

B: при 8 фрлања на случајно избрана монета 3 пати се појавило писмо.

Веројатноста за реализација на настаните A_1, A_2 и A_3 е подеднаква и изнесува $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Овие настани се дисјунктни по парови и ги опфаќаат сите можности во поглед на изборот на монета. Со тоа се исполнети условите за примена на формулите на Бејес, па затоа за бараната веројатност имаме

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}. \tag{1.2}$$

Сега, да претпоставиме дека е избрана првата монета. Тогаш, веројатноста дека во серија од осум фрлања на монетата три пати ќе се појави писмо е $P(B|A_1) = \binom{8}{3} \cdot 0.4^3 \cdot (1-0.4)^5 \approx 0.27869$. Слично, $P(B|A_2) = \binom{8}{3} \cdot 0.7^3 \cdot (1-0.7)^5 \approx 0.04668$ и $P(B|A_3) = \binom{8}{3} \cdot 0.8^3 \cdot (1-0.8)^5 \approx 0.00918$. Со замена на вредностите во (1.2) добиваме $P(A_2|B) = 0.65737$.

1.6.6. Веројатноста за појава на дефект кај секој од моторите на авионот еднаква е на p. Моторите се расипуваат независно еден од друг, а авионот може да лета ако работат повеќе од половина од вградените мотори. Дали е побезбедно да се лета со авион со три или пет мотори.

Решение. Авион со три мотори безбедно ќе лета ако му се расипат 0 или 1 мотор. Значи, веројатноста дека ќе имаме безбеден лет со авион со три мотори е

$$P_1 = \binom{3}{0} p^0(1-p)^3 + \binom{3}{1} p^1(1-p)^2 = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2 = (1+2p)(1-p)^2.$$

Слично, веројатноста дека ќе имаме безбеден лет со авион со пет мотори, т.е., веројатноста дека од пет мотори ќе се расипат 0, 1 или 2 е

$$\begin{aligned} P_2 &= \binom{5}{0} p^0(1-p)^5 + \binom{5}{1} p^1(1-p)^4 + \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = \\ &= (1-p)^5 + 5p(1-p)^4 + 10p^2(1-p)^3 = (1+3p+6p^2)(1-p)^3. \end{aligned}$$

Понатаму, $P_2 - P_1 = 6p^2(1-p)^2(\frac{1}{2} - p)$. Затоа за $p < 1/2$ добиваме $P_2 - P_1 > 0$, т.е. $P_2 > P_1$, па веројатноста дека ќе имаме безбеден лет е поголема кај авион со пет мотори. Ако $p > 1/2$ тогаш $P_2 < P_1$ и побезбедно е да се лета со авион со три мотори. Во случајот кога $p = 1/2$ безбедноста за летање е иста кај двата типа авиони.

1.6.7. Во една серија од $n = 10$ независни експерименти, веројатноста за реализација на настанот A е $p = 0.3$.

а) Да се определи веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем еднаш;

б) Колку пати треба да се повтори експериментот така што со веројатност поголема од $\alpha = 0.99$ може да тврдиме дека настанот A ќе се реализира барем еднаш?

в) За која вредност на p може со веројатност поголема од $\alpha = 0.99$ да тврдиме дека настанот A ќе се реализира барем еднаш при $n = 10$ повторувања на експериментот?

Решение.

а) Веројатноста дека ќе се случи спреотивното, т.е., дека во серија од $n = 10$ независни експериманти настанот A нема да се реализира изнесува $\binom{n}{0}p^0(1-p)^n = (1-p)^n$. Значи веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем еднаш е $1 - (1-p)^n \approx 0.97175$.

б) Врз основа на решението на делот (а) следува дека бараната вредност за n е најмалиот природен број кој ја задоволува неравенката $1 - (1-p)^n > \alpha$, т.е., $(1-p)^n < 1 - \alpha$. По логаритмирањето на обете страни, водејќи сметка дека $\ln(1-p) < 0$, добиваме $n > \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)} \approx 12.91139$. Значи: ако експериментот се повтори 13 пати тогаш веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем еднаш е поголема од 0.99.

в) Повторно врз основа на решението на делот (а) следува дека p може да прими било која вредност помала или еднаква на 1 што го задоволува неравенството $1 - (1-p)^n > \alpha$, односно $p > 1 - \sqrt[n]{1-\alpha} \approx 0.36904$.

Дополнителни задачи

1.6.8. Колкава е веројатноста дека во еден автобус од 40 луѓе ќе има повеќе од 1 со сини очи ако се знае дека дека секој десетти човек има сини очи?

1.6.9. Хомогена нумерирана коцка се фрла 18 пати. Да се определи веројатноста на секој од настаните:

A: во првите шест фрлања се појавила барем една шестка;

B: во првите 12 фрлања се појавиле барем две шестки;

C: во сите 18 фрлања се појавиле барем три шестк.

1.6.10. Да се определи веројатноста дека при 10 фрлања на монета писмо ќе се појави 4, 5 или 6 пати.

1.6.11. Веројатноста дека потрошувачката на вода во една фабрика ќе биде во вообичаените граници е 3/4. Да се определи веројатноста дека потрошувачката на вода во фабриката во текот на шест последователни денови ќе биде во вообичаените граници:

а) точно еден ден;

б) барем еден ден;

в) ниту еден ден;

г) сите денови.

1.6.12. Нека точките M, N P се средини на страните на триаголникот ABC. Да се определи веројатноста од 10 случајно избрани точки од внатрешноста на триаголникот ABC барем 8 ќе лежат во внатрешноста на триаголникот MNP.

1.6.13. Во една кутија се наоѓаат 2 бели, 2 црни и 6 зелени топчиња кои се разликуваат само по бојата. На случаен начин се извлекуваат 20 топчиња така што секое извлечено топче се враќа во кутијата. Да се определи веројатноста при тоа да се извлечени 12 бели и 8 црни топчиња.

1.6.14. Да се определи веројатноста дека при шест фрлања на монета ќе се појават барем три писма.

1.6.15. Што е поверојатно: при пет фрлања на монета да се појават точно три писма или при осум фрлања на монета да се појават точно четири писма.

1.6.16. Еден студент полага испит кој се состои од 10 прашања, секое со по три понудени одговори од кои само еден е точен. Студентот на случаен начин го бира одговорот на секое прашање. Да се определи веројатноста дека студентот ќе го положи испитот ако за положување потребно е да има барем 6 точни одговори.

1.6.17. Во една серија 6% од производите се неисправни. Колку производи треба да се земат од серијата за веројатноста меѓу нив да има неисправен производ биде не помала од 0.95?

1.6.18. Во една кутија има 8 бели и 12 црни топчиња кои се разликуваат само по бојата. Колку пати треба да извлечеме по едно топче и потоа да го вратиме во кутијата за со веројатност поголема од 0.9 гарантираме дека барем еднаш ќе извлечеме бело топче?

1.6.19. Да се определи веројатноста за појава на шкарт при производството на еден артикал, за со веројатност од 0.99 да можеме да тврдиме дека меѓу 10 артикли има барем еден шкарт.

1.6.20. Една монета се фрла десет пати. Да се определи веројатноста дека при првите пет фрлања ќе се појави ист број на писма како и при вторите пет фрлања.

Глава 2

СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

2.1 ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

2.1.1. Да се провери дали следните случајни променливи се со рамномерна дискретна распределба:

а) X_1: бројот кој се појавува при фрлање на коцка;

б) X_2: роденденот на случајно избран човек роден во година која не е престапна;

в) X_3: бројот на фрлања на монета до појавување на писмо.

Решение.

а) При фрлање на коцка може да се појават броевите од 1, 2, 3, 4, 5 и 6, при што веројатноста за појавување на секој од нив е еднаква и изнесува 1/6. Значи $P(X_1 = i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, \dots 6$.

б) Да ги нумерираме деновите во годината со броевите од 1 до 365. Веројатноста дека случајно избран човек е роден на i-тиот ден во годината не зависи од i и изнесува 1/365, т.е., $P(X_2 = i) = \frac{1}{365}$, $i = 1, 2, \dots 365$.

в) Веројатноста за појавување на писмо при фрлање на монета е $p = 1/2$. Согласно задачата 1.4.14(а), веројатноста дека писмо прв пат ќе се појави при i-тото фрлање е $(1-p)^{i-1}p$, т.е., $P(X_3 = i) = (1-p)^{i-1}p = \frac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Значи веројатноста зависи од i.

Заклучок: случајните променливи X_1 и X_2 се со рамномерна дискретна распределба, додека случајната променлива X_3 не, таа е со ??? распределба.

2.1.2. Една монета се фрла 8 пати. Да се определи законот и функцијата на распределба на случајната променлива која го означува бројот на писма што се појавиле при тоа, како и веројатноста дека тој број е парен. Колкаво е соодветното математичко очекување и дисперзија?

Решение. Нека со X ја означиме случајната променлива која го дава бројот на појавувања на писмо при 8 фрлања на монета. Значи имаме серија од $n = 8$ идентични и независни помеѓу себе експерименти, такви што при секој од нив можни се две реализации: писмо - со веројатност $p = 1/2$ и глава - со веројатност $1 - p = 1/2$. Следува дека случајната променлива X е со биномна распределба, односно, веројатноста дека при 8 фрлања на монета писмо ќе се појави k пати, т.е., дека случајната променлива X ќе добие вредност k, $k = 0, 1, \ldots 8$, е

$$p_k = P(X = k) = \binom{8}{k} p^k (1-p)^{8-k} = \binom{8}{k} \frac{1}{2^8}.$$

Затоа законот на распределбата на веројатностите за случајната променлива X е

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{32} & \frac{7}{64} & \frac{7}{32} & \frac{35}{128} & \frac{7}{32} & \frac{7}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{256} \end{pmatrix}.$$

Функцијата на распределбата на веројатностите за случајната променлива X е $F_X(x) = P(X < x) = \sum_{k<x} p_k$, т.е.,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ p_0 = \frac{1}{256}, & 0 < x \leq 1 \\ p_0 + p_1 = \frac{9}{256}, & 1 < x \leq 2 \\ p_0 + p_1 + p_2 = \frac{37}{256}, & 2 < x \leq 3 \\ \sum_{k=0}^{3} p_k = \frac{93}{256}, & 3 < x \leq 4 \\ \sum_{k=0}^{4} p_k = \frac{163}{256}, & 4 < x \leq 5 \\ \sum_{k=0}^{5} p_k = \frac{219}{256}, & 5 < x \leq 6 \\ \sum_{k=0}^{6} p_k = \frac{247}{256}, & 6 < x \leq 7 \\ \sum_{k=0}^{7} p_k = \frac{255}{256}, & 7 < x \leq 8 \\ \sum_{k=0}^{8} p_k = 1, & 8 < x \end{cases}.$$

Математичкото очекување на случајната променлива X е $MX = np = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ а дисперзијата е $DX = np(1-p) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$.

2.1.3. Група од 20 студенти положила одреден испит. При тоа 10 студенти добиле оцена 8, 6 студенти добиле оцена 9 и 4 студенти добиле оцена 10. Случајно се избираат двајца студенти. Да се определи законот и функцијата на распределба на случајната променлива X која ја означува средната вредност од оценките на двата избрани студенти. Потоа да се определат нејзиното математичко очекување и дисперзија.

Решение. Случајната променлива X може да добие некоја од следните вредности: $\frac{8+8}{2} = 8$, $\frac{8+9}{2} = 8.5$, $\frac{9+9}{2} = 9$, $\frac{9+10}{2} = 9.5$ или $\frac{10+10}{2} = 10$. Веројатноста случајно избран студент да положил со оцена 8 изнесува $\frac{10}{20} = 0.5$, со оцена 9 изнесува $\frac{6}{20} = 0.3$ и со оцена 10 изнесува $\frac{4}{20} = 0.2$. Затоа

$$P(X = 8) = 0.5^2 = 0.25,$$

$$\begin{aligned}
&P(X = 8.5) = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.3,\\
&P(X = 9) = 0.3^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.2 = 0.29,\\
&P(X = 9.5) = 2 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.12 \text{ и}\\
&P(X = 10) = 0.2^2 = 0.04,
\end{aligned}$$

односно законот на распределба на случајната променлива X е

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 8.5 & 9 & 9.5 & 10 \\ 0.25 & 0.3 & 0.29 & 0.12 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

Од овде, соодветната функција на распределба е

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 8 \\ 0.25, & 8 < x \leq 8.5 \\ 0.25 + 0.3 = 0.55, & 8.5 < x \leq 9 \\ 0.25 + 0.55 + 0.29 = 0.84, & 9 < x \leq 9.5 \\ 0.25 + 0.55 + 0.29 + 0.12 = 0.96, & 9.5 < x \leq 10 \\ 0.25 + 0.55 + 0.29 + 0.12 + 0.04 = 1, & 10 < x \end{cases},$$

а математичкото очекување и дисперзијата се соодветно

$$\begin{aligned}
MX = {}& 8 \cdot P(X = 8) + 8.5 \cdot P(X = 8.5) + 9 \cdot P(X = 9) + \\
&+ 9.5 \cdot P(X = 9.5) + 10 \cdot P(X = 10) = 8.7
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
DX = {}& 8^2 \cdot P(X = 8) + 8.5^2 \cdot P(X = 8.5) + 9^2 \cdot P(X = 9) + \\
&+ 9.5^2 \cdot P(X = 9.5) + 10^2 \cdot P(X = 10) - 8.7^2 = 0.305.
\end{aligned}$$

2.1.4. Да се определи параметарот a кај случајната променлива X која има закон на распределба

а) $P(X = n) = a\binom{5}{n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$;

б) $P(X = n) = a \cdot 2^{2-n}$, $n \in \mathbb{R}$.

Во делот (а) да се определи MX и DX.

Решение.

а) Од $P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 5) = 1$ следува

$$a \cdot \left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{5}\right] = 1,$$

односно $a \cdot 2^5 = 1$ и $a = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$. Понатаму,

$$MX = \sum_{n=0}^{5} nP(X = n) = \frac{1}{25}\left[0 \cdot \binom{5}{0} + 1 \cdot \binom{5}{1} + \cdots + 5 \cdot \binom{5}{5}\right] = 2.5$$

и

$$DX = \sum_{k=0}^{5} n^2 P(X = n) - (MX)^2 = 3.35.$$

б) Со оглед на тоа дека треба да важи $\sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = 1$, добиваме

$$\begin{aligned}
2a + a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2^2}a + \cdots + \frac{1}{2^{k-2}}a + \ldots &= 1,\\
2a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots\right) &= 1,\\
2a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} &= 1,
\end{aligned}$$

односно $a = \frac{1}{4}$.

2.1.5. Во едно езеро има непознат број на пастрмки. За да се определи нивниот број уловени се 600 пастрмки, означени се и вратени се во езерото. По еден месец повторно се уловени 100 пастрмки меѓу кои имало 10 означени.

а) Кој е најверојатниот број на пастрмки во езерото?

б) Ако во езерото имало 4000 пастрмки, од кои 600 се обележани, да се определи математичкото очекување на бројот на обележани меѓу 100 уловени пастрмки.

Решение.

а) Нека во езерото има N пастрмки и нека случајната променлива X го означува бројот на обележани пастрмки помеѓу 100-те уловени при второто ловење. Тогаш X има биномна распределба при што $n = 100$ и веројатноста дека некоја од пастрмките е обележана е $p = \frac{600}{N}$. За математичкото очекување на случајната променлива X може да сметаме дека изнесува 10 бидејќи помеѓу 100-те пастрмки уловени при второто ловење имало 10 обележани. Затоа, $MX = n \cdot p = \frac{60000}{N} = 10$, т.е., најверојатниот број на пастрмки во езерото е $N = 6000$.

б) Во согласност со анализата во делот (а) имаме $N = 4000$, $n = 100$ и $p = \frac{600}{4000} = 0.15$. Затоа, $MX = n \cdot p = 15$.

2.1.6. Една авионска компанија има сознание дека 4% од луѓето кои ќе купат карта не се појавуваат при полетувањето на авионот. Заради тоа тие за авион со 98 седишта тие продаваат 100 карти. Да се определи веројатноста дека секој патник кој ќе купи карта и ќе се појави при полетувањето на авионот ќе има слободно седиште ако се знае дека за дадениот лет компанијата продала 100 карти.

Решение. Нека X е случајната променлива која го означува бројот на луѓе кои купиле карта и не се појавиле при полетувањето на авионот. Таа има биномна распределба за која $n = 100$ и $p = 4\% = 0.04$. Тогаш бараната веројатност е

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

Бидејќи $n = 100 \geq 30$ и $np = 4 \leq 10$ можеме да извшиме апроксимација на биномната распределба со Пуасонова, т.е., да земеме дека $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, каде $\lambda = np = 4$. Со оваа апроксимација избегнуваме пресметка на $(1-p)^1 00 = 0.96^1 00$ и $(1-p)^{99} = 0.96^{99}$ која може да се реализира единствено со примена на компјутер. Конечно,

$$P(X \geq 2) \approx 1 - \frac{4^0}{0!} e^{-4} - \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 1 - 5e^{-4} \approx 0.908.$$

2.1.7. (проблем на В. Фелер) Живеете во јужен Лондон за време на Втората светска војна. Тој дел од градот може да се подели на 100 делови со еднаква површина. Ако при едно бомбардирање се исфрлени 500 бомби над јужен Лондон колкава е веројатноста дека делот во кој вие живеете нема да биде погоден? Кој е најверојатниот број на бомби кои ќе го погодат делот во кој живеете?

Решение. Нека случајната променлива X го означува бројот на бомби кои го погодиле делот во кој живеете. Таа е со биномна распределба за која $n = 500$ и $p = \frac{1}{100} = 0.01$. Веројатноста дека делот вој живеете нема да биде погоден е $P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{100}$. Заради неможноста да пресметаме $(1-p)^{100} = 0.99^{100}$, а користејќи дека $n = 500 \geq 30$ и $np = 5 \leq 10$, вршиме апроксимација на биномната распределба со Пуасонова, па така бараната веројатност е

$$P(X = 0) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = e^{-5} \approx 0.0067.$$

Најверојатниот број на бомби кои ќе го погодат делот во кој живеете е всушност математичкото очекување на случајната променлива X, $MX = np = 5$.

Дополнителни задачи

2.1.8. Хомогена коцка се фрла два пати. Нека случајната променлива X го означува поголемиот од двата броеви кои при тоа се појавиле. Да се определи нејзиниот закон и функција на распределба. Потоа да се определи веројатноста $P(2 \leq X \leq 5)$.

2.1.9. Да се определат законот и функцијата на распределба на случајната променлива X која ги прима вредностите 0, 1, 2, 3 и 4 со еднакви веројатности.

2.1.10. Хомогена коцка се фрла 4 пати. Нека X е бројот на шестки, а Y бројот на парни броеви што се појавиле при тоа. Да се определи законот на распреелба на случајните променливи X и Y, нивните математички очекувања и дисперзии.

2.1.11. Веројатноста дека произведен телевизор ќе биде неисправен е 1/100. Нека е X бројот на неисправни во една серија од 100 телевизори. Да се определи распределбата на случајната променлива X и веројатноста дека во серијата ќе има барем 2 неисправни телевизори. Кој е најверојатниот број на неисправни телевизори во серијата од 100 и колкава е "најверојатната" грешка што се прави при таа проценка?

2.1.12. Математичкото очекување на случајната променлива X изнесува 12.5, а дисперзијата 3.48. Да се определи математичкото очекување и дисперзија на следните случајни променливи: а) $3X$; б) $X - 10$; в) $X/5$; г) $\frac{2X+5}{6}$.

2.1.13. Хомогена коцка се фрла се до појавата на единица, а најмногу 4 пати. Да се определи распределбата на случајната променлива која го означува бројот на фрлања, нејзиното математичко очекување и дисперзија.

2.1.14. Во една група се наоѓаат 10 мажи и 20 жени. На случаен начин формирана е делегација од три члена. Да се определи распределбата на случајната променлива која го означува бројот на мажи во делегацијата.

2.1.15. Во една кутија се наоѓаат 6 бели и 24 црни топчиња. Нека е X бројот на црни топчиња помеѓу 5 случајно избрани топчиња. Да се определи распределбата на случајната променлива X, нејзиното математичко очекување и дисперзија ако извлечените топчиња

а) се враќаат во кутијата;

б) не се враќаат во кутијата.

2.1.16. Едно научно истражување покажало дека бројот на поголеми пролизгувања на земјиштето во Канада во период од 5000 години изнесува 1.57 на 100 km^2.

а) Да се определи математичкото очекување и стандардната девијација на случајната променлива X која го означува бројот на поголеми пролизгувања на земјиштето во Канада на секои 100 km^2 во период од 5000 години;

б) Да се определи веројатноста дека бројот на поголеми пролизгувања на земјиштето во Канада на секои 100 km^2 во период од 5000 години е поголем или еднаков на 3.

2.1.17. Нека бројот на микропукнатини во дадена серија производи е со Поасонова распределба и нека средниот број на микропукнатини изнесува 2.5.

а) Да се определи математичкото очекување и стандардната девијација на случајната променлива X која го означува бројот на микропукнатини кај случајно избран производ од серијата;

б) Да се определи веројатноста дека случајно избран производ ќе има точно 5 микропукнатини;

в) Да се определи веројатноста дека случајно избран производ ќе има барем 2 микропукнатини.

2.1.18. Едно истражување покажало дека во просек само 1 од 1000 луѓе е со одредена ретка крвна група. Да се определи веројатноста дека во место со 10000 жители нема ниту еден со таа крвна група.

2.1.19. Еден пекар во смесата за производство на 500 парчиња торта става 1000 лешници. Случајната променлива X го означува бројот на лешници во случајно избрано парче торта и тој број не може да биде поголем од 5. Да се определи распределбата на случајната променлива X и веројатноста дека случајно избрано парче торта ќе има точно 2 лешници.

2.1.20. Веројатноста дека во една нуклеарна централа ќе дојде до поголем инцидент е 0.001. Ако во Европа има 100 нуклеарни централи да се определи веројатноста дека во текот на годината ќе има барем еден поголем инцидент. Кој е "најверојатниот" број на инциденти во текот на една година?

2.1.21. Познато е дека во една серија производи 1% се дефектни. Да се определи веројатноста дека помеѓу 200 производи

а) ниту еден нема да биде дефектен;

б) ќе има повеќе од три дефектни.

2.1.22. Веројатноста дека еден производ е дефектен изнесува 0.001. Да се определи веројатноста дека од 5000 испитани производи барем два се дефектни. Кој е "најверојатниот" број на дефектни производи?

2.2 НЕПРЕКИНАТИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

2.2.1. Да се скицира графикот на дадените функции и за секоја од нив да се провери дали претставува функција на распределба на некоја случајна променлива. Во потврден случај да се определи соодветната густина на распределба.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \pi/2 \\ |\cos x|, & \pi/2 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases};$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \log_{10} x, & 1 < x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases};$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases};$$

$$F_4(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Решение. Графиците на функциите $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ и $F_1(x)$ дадени се на цртежите ш, ы, з и ч, соодветно. Од графиците може да се уочи дека сите четири функции ги задоволуваат потребните и доволни услови за тие да бидат функции на распределба на некоја случајна променлива ($\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $F(x)$ е монотоно растечка и непрекината од лево). Соодветните густини на распределба $p(x)$ се добиваат во точките во кои функцијата на распределба $F(x)$ е диференцијабилна користејќи дека $p(x) = F'(x)$. Затоа

$$p_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases};$$

$$p_2(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1,10) \\ \frac{1}{x \ln 10}, & x \in (1,10) \end{cases};$$

$$p_3(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1,0) \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1,0) \end{cases};$$

$$p_4(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{4}{9}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}x}, & x > 0 \end{cases}.$$

2.2.2. Да се провери дали функциите

$$p_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2) \\ 2x, & x \in [0,0.5) \\ 2x-1, & x \in [0.5,1) \\ 2x-2, & x \in [1,1.5) \\ 2x-3, & x \in [1.5,2) \end{cases} \text{ и } p_2(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,3] \text{ или } x \in [1,2] \\ \frac{1}{2}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x \in [2,3) \end{cases}.$$

претставуваат густина на распределба на некоја случајна променлива и во потврден случај да се определи соодветната функција на распределба. Да се скицираат графиците на дадените и добиените функции.

Решение. Графиците на функциите $p_1(x)$ и $p_2(x)$ дадени се на цртежите ш и ы, соодветно. Понатаму, потребни и доволни услови функција $p(x)$ да биде густина на распределба се: $p(x) \geq 0$ за секое $x \in \mathbb{R}$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Од цртежите ш и ы може да се заклучи дека функциите $p_1(x)$ и $p_2(x)$ го задоволуваат првиот услов, а во врска со вториот имаме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} p_1(x)dx}_{I_1} + \int_{0}^{2} p_1(x)dx + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} p_1(x)dx}_{I_6} =$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{0.5} 2xdx}_{I_2} + \underbrace{\int_{0.5}^{1} (2x-1)dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{1}^{1.5} (2x-2)dx}_{I_4} + \underbrace{\int_{1.5}^{2} (2x-3)dx}_{I_5} =$$

$$= x^2\Big|_0^{0.5} + (x^2 - x)\Big|_{0.5}^{1} + (x^2 - 2x)\Big|_{1}^{1.5} + (x^2 - 3x)\Big|_{1.5}^{2} = 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} p_2(x)dx}_{J_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} p_2(x)dx}_{J_2} + \underbrace{\int_{1}^{2} p_2(x)dx}_{J_3} + \underbrace{\int_{2}^{3} p_2(x)dx}_{J_4} +$$

$$+ \int_{3}^{+\infty} p_2(x)dx = \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx}_{J_2} + \underbrace{\int_{1}^{2} \frac{1}{2}dx}_{J_4} = \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x\Big|_1^2 = 1.$$

Значи обете функции, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ се густини на распределба на некоја случајна променлива. Соодветните функции на распределба ги добиваме користејќи дека $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$. Значи,

$$F_1(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0, & x \leq 0 \\ I_1 + \int_0^x 2xdx = x^2, & 0 < x \leq 0.5 \\ I_1 + I_2 + \int_{0.5}^{x} (2x-1)dx = x^2 - x + 0.5, & 0.5 < x \leq 1 \\ I_1 + I_2 + I_3 + \int_1^x (2x-1)dx = x^2 - 2x + 1.5, & 1 < x \leq 1.5 \\ I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \int_{1.5}^{x} (2x-2) = x^2 - 3x + 3, & 1.5 < x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, & 2 < x \end{cases}$$

и

$$F_2(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0, & x \leq 0 \\ J_1 + \int_0^x (1/2)dx = x/2, & 0 < x \leq 1 \\ J_1 + J_2 + \int_1^x 0 \cdot dx = 1/2, & 1 < x \leq 2 \\ J_1 + J_2 + J_3 + \int_2^x (1/2)dx = (x-1)/2, & 2 < x \leq 3 \\ \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, & 3 < x \end{cases} .$$

2.2.3. Случајната променлива X има густина на распределба $p_X(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Да се определи вредноста на параметарот a, функцијата на распределба на случајната променлива X и веројатноста X да добие вредност помеѓу -1 и 1.

Решение. За определување на вредноста на параметарот a ќе искористиме дека потребен услов функцијата $p_X(x)$ да биде густина на распределба на некоја случајна променлива е $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$. Од овде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = a \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = a \cdot \pi = 1,$$

односно $a = \frac{1}{\pi}$. Соодветната функција на распределба е

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\arctan t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Веројатноста случајната променлива X да добие вредност помеѓу -1 и 1 е

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 1) &= F_X(1) - F_X(-1) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan 1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\arctan(-1) + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan 1 - \arctan(-1)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2.4. Нека X е случајна променлива со густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} ax+b, & x \in (-1,1) \\ 0, & x \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Да се определи параметарот b и да се оцени параметарот a. Понатаму, да се определат и математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X.

Решение. Параметарот b ќе го определиме користејќи дека $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$ е потребен услов за функцијата $p_X(x)$ да биде густина на распределба на некоја случајна променлива. Значи

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} p_X(x)dx + \int_{-1}^{1} p_X(x)dx + \int_{1}^{+\infty} p_X(x)dx = \\ &= \int_{-1}^{1}(ax+b)dx = \left(a\frac{x^2}{2} + bx\right)\Big|_{-1}^{1} = 2b = 1, \end{aligned}$$

т.е., $b = 1/2$. Понатаму, за густината треба да важи $p_X(x) \geq 0$, за секој реален број x. Затоа, од $p_X(x) \geq |a| \cdot (-1) + 1/2 \geq 0$ следува $|a| \leq 1/2$.

За математичкото очекување на случајната променлива X се добива

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} xp_X(x)dx + \int_{-1}^{1} xp_X(x)dx + \int_{1}^{+\infty} xp_X(x)dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} x(ax+b)dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2a}{3}$$

и дисперзијата е

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx - (MX)^2 = \int_{-\infty}^{-1} x^2 p_X(x)dx + \int_{-1}^{1} x^2 p_X(x)dx +$$
$$+ \int_{1}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx - (MX)^2 = \int_{-1}^{1} x^2(ax+b)dx - \left(\frac{2a}{3}\right)^2 =$$
$$= \left(a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{2b}{3} - \frac{4a^2}{9} = \frac{1}{3} - \frac{4a^2}{9}.$$

2.2.5. Паузата помеѓу две последователни операции кај една машина е случајна променлива X со рамномерна распределба помеѓу 0.5 и 2.25 s. Да се определи

а) математичкото очекување μ и стандардната девијација σ на паузата помеѓу две последователни операции;

б) веројатноста $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$; и

в) веројатноста дека паузата ќе биде помала од 1 s.

Решение.

а) Случајната променлива X има рамномерна распределба помеѓу $a = 0.5$ и $b = 2.25$. Затоа нејзината густина на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0.5, 2.25) \\ \frac{1}{2.25-0.5} = \frac{4}{7}, & x \in (0.5, 2.25) \end{cases},$$

математичкото очекување е

$$\mu = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx = \int_{0.5}^{2.25} x \cdot \frac{4}{7} \cdot dx = \frac{2x^2}{7}\Big|_{0.5}^{2.25} = 1.375$$

и дисперзијата е

$$\sigma = DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx - (MX)^2 = \int_{0.5}^{2.25} x^2 \cdot \frac{4}{7} \cdot dx - 1.375^2 \approx 0.2552.$$

б) Користејќи ги вредностите на μ и σ добиени во делот (а), добиваме дека $\mu - 2\sigma = 0.8646$ и $\mu + 2\sigma = 1.8854$. Затоа

$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = \int_{0.8646}^{1.8854} p_X(x)dx = \int_{0.8646}^{1.8854} \frac{4}{7}dx = \frac{4}{7}x\Big|_{0.8646}^{1.8854} \approx 0.5833.$$

в) Бараната веројатност е

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} p_X(x)dx = \int_{0.5}^{1} \frac{4}{7}dx = \frac{4}{7}x\Big|_{0.5}^{1} = \frac{2}{7}.$$

2.2.6. Нека случајната променлива X е со нормална распределба со параметри $\mu = 70$ и $\sigma = 10$. Да се пресмета:

а) $P(X < 60)$;

б) $P(X > 50)$;

в) $P(X > 90)$;

г) $P(60 < X < 85)$.

Решение. На почетокот да забележиме дека $Z = \frac{X-70}{10}$ е стандардизираната случајна променлива за случајната променлива X. Во деловите (в) и (г) ќе искористиме дека $P(Z > a) = P(Z < -a)$ и $P(Z < a) = P(Z > -a) = 1 - P(Z \leq -1)$, соодветнно.

а) $P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60-70}{10}\right) = P(Z < -1) = 0.15866$;

б) $P(X > 50) = P\left(Z > \frac{50-70}{10}\right) = P(Z > -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - 0.02275 = 0.97725$;

в) $P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90-70}{10}\right) = P(Z > 2) = P(Z < -2) = 0.02275$;

г) $P(60 < X < 85) = P\left(\frac{60-70}{10} < Z < \frac{85-70}{10}\right) = P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z \leq -1) = P(Z > -1.5) - P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq -1.5) - P(Z \leq -1) = 1 - 0.06681 - 0.15866 = 0.77453$.

2.2.7. Еден производител нуди лежишта чиј дијаметар X е случајна променлива со нормална распределба со параметри $\mu = 1$ cm и $\sigma = 0.002$ cm. Купувачот побарува лежишта со дијаметар 1 ± 0.003 cm.

а) Колкав процент од лежиштата не го задоволуваат барањето на купувачот?

б) Со подобрена контрола на квалитетот производителот може да ја намали вредноста на σ. Која е најголемата вредност на σ што гарантира дека помалку од 1% од лежиштата не го задоволуваат барањето на купувачот?

Решение.

а) Купувачот побарува лежишта чиј дијаметар X се наоѓа во интервалот од $1 - 0.003 = 0.997$ cm до $1 + 0.003 = 1.003$ cm. Веројатноста случајно избрано лежиште да не го задоволува ова барање е

$$\begin{aligned} 1 - P(0.997 \leq X \leq 1.003) &= 1 - P\left(\frac{0.997-1}{0.002} \leq Z \leq \frac{1.003-1}{0.002}\right) = \\ &= 1 - P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) = 1 - [P(Z \leq 1.5) - P(X < -1.5)] = \\ &= 1 - [P(Z \geq -1.5) - P(X < -1.5)] = \\ &= 1 - [1 - P(Z < 1.5) - P(X < -1.5)] = \\ &= 2P(Z < -1.5) = 2 \cdot 0.06681 = 0.13362. \end{aligned}$$

Овде водено е сметка дека X е случајна променлива со нормална распределба и $Z = \frac{X-1}{0.002}$ е нејзината стандардизираната случајна променлива. Исто така, искористено е дека $P(Z < a) = P(Z > -a) = 1 - P(Z \leq -a)$. Значи 13.362% од лежиштата не го задоволуваат барањето на купувачот.

б) Слично како во делот (а), процентот на лежишта кои не го задоволуваат барањето на купувачот еднаков е на веројатноста случајно избрано лежиште да не ги задоволува тие барања, т.е., еднаков е на

$$\begin{aligned} 1 - P(0.997 \leq X \leq 1.003) &= 1 - P\left(\frac{0.997-1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1.003-1}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - P\left(-\frac{0.003}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0.003}{\sigma}\right) = 2 \cdot P\left(Z < -\frac{0.003}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Следува дека $P\left(Z < -\frac{0.003}{\sigma}\right) < 0.005 = \frac{1\%}{2}$. Понатаму, од таблицата на стандардизираната нормална распределба констатираме дека веројатноста која е помала од 0.005, а истовремено најблиску до неа е 0.00494, т.е., $P(Z < -2.58) = 0.00494$. Затоа $-\frac{0.003}{\sigma} = -2.58$ и $\sigma \approx 0.00116$ cm.

2.2.8. Бројот на поени со кои е оценет студентот на еден испит е случајна променлива X со нормална распределба со параметри μ и σ. Професорот ги формира оценките според табелата

поени	оценка
$\mu + \sigma \leq X$	10
$\mu \leq X < \mu + \sigma$	9
$\mu - \sigma \leq X < \mu$	8
$\mu - 2\sigma \leq X < \mu - \sigma$	7
$\mu - 3\sigma \leq X < \mu - 2\sigma$	6
$X < \mu - 3\sigma$	5

Колкав процент од студентите кои го полагале испитот ќе добие оценка 10, 9, 8, 7, 6, 5?

Решение. Процентот на студенти кои ќе добијат определена оцена еднаков е на веројатноста случајно дека избран студент ќе ја добие истата таа оцена. Во понатамошните анализи $Z = \frac{X-70}{10}$ е стандардизираната случајна променлива за случајната променлива X. Тогаш користејќи $P(Z \geq a) = P(Z \leq -a)$ добиваме

$$P(X \geq \mu + \sigma) = P\left(Z \geq \frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \geq 1) = P(Z \leq -1) = 0.15866,$$

односно 15.866% од студентите ќе добијат оцена 10. Понатаму, од $P(Z < a) = 1 - P(z \leq -a)$ добиваме

$$\begin{aligned} P(\mu \leq X < \mu + \sigma) &= P\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma} Z < \frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = P(0 \leq Z < 1) = \\ &= P(Z < 1) - P(Z < 0) = 1 - P(Z \leq -1) - P(Z < 0) = \\ &= 1 - 0.15866 - 0.5 = 0.34134 \end{aligned}$$

и следува дека 34.134% од студентите ќе добијат оцена 9. На сличен начин се добива (провери) дека

$$P(\mu - \sigma \leq X < \mu) = 0.34134, \quad P(\mu - 2\sigma \leq X < \mu - \sigma) = 0.13591,$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X < \mu - 2\sigma) = 0.0214, \quad P(X < \mu - 3\sigma) = 0.00135.$$

На тој начин ја добивме следната распределба оцена-процент од студенти кои ќе ја добијат таа оцена:

оценка	процент
10	15.866
9	34.134
8	34.134
7	13.591
6	2.140
5	0.135

2.2.9. Нека времето потребно за поправка на еден автомобил е случајна променлива X со експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1/2$.

а) Да се определи веројатноста дека поправката ќе трае помалку од 4 часа.

б) Ако поправката трае повеќе од 2 часа, да се определи веројатноста дека ќе трае помалку од 8 часа.

Решение. Според условот на задачата X е случајна променлива со експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1/2$, т.е., има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

а) Според тоа веројатноста дека поправката ќе трае помалку од 4 часа е

$$P(X < 4) = \int_{-\infty}^{4} p_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} p(x)dx + \int_{0}^{4} p_X(x)dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{-x/2} =$$
$$= -e^{-x/2}\Big|_0^4 = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0.86466.$$

б) Користејќи го својството на "заборавање" на случајните променливи со експоненцијална распределба, $P(X > r + s|X > r) = P(X > s)$, за бараната веројатност добиваме

$$P(X > 8|X > 2) = P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \int_{0}^{6} \frac{1}{2}e^{-x/2} =$$
$$= 1 + e^{-x/2}\Big|_0^6 = \frac{1}{e^3} \approx 0.049787.$$

Дополнителни задачи

2.2.10. Случајната променлива X има функција на распределба

а) $F(x) = \begin{cases} \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$, λ е произволен параметар;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/a, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$;

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ a(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$.

Да се определи коефициентот a, густината на распределба, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X.

2.2.11. Густината на распределба на случајната променлива X е

а) $p(x)=\begin{cases} k|x|, & x\in[-2,1] \\ 0, & x\notin[-2,1] \end{cases}$;

б) $p(x)=\begin{cases} k\cos 2x, & x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \\ 0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$;

в) $p(x)=\frac{k}{1+x^2}$.

Да се определи коефициентот k, функцијата на распределба, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X. Потоа да се определи $P\left(X\leq\frac{1}{2}\right)$.

2.2.12. Случајната променлива X има униформна распределба $U(0,a)$ и при тоа $P(X<2)=0.3$. Да се определи коефициентот a, функцијата на распределба, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X.

2.2.13. Една точка е случајно фрлена во круг со радиус R. Веројатноста точката да падне во дадена подобласт од кругот е пропорционална со плоштината на подобласта. Да се определат функцијата и густината на распределба да случајната променлива што го означува растојанието на точката до цектарот на кругот.

2.2.14. Скалата на еден мерач е со чекор 0.2. Колкава е веројатноста дека отчитувајќи ја вредноста од мерачот ќе направиме грешка поголема од 0.025, ако при отчитувањето се врши заокружување на најблиската вредност од поделбата?

2.2.15. Нека времето (мерено во години) од купувањето на автомобил до првата посериозна поправка е случајна променлива со експоненцијална распределба со параметар $\lambda=1/4$. Да се опредли веројатноста дека автомобил купен денес нема да треба да се поправа во следните 4 години.

2.2.16. Познато е дека векот на траење на една сијалица е случајна променлива со густина на распределба $p(t)=\lambda^2 te^-\lambda t$, каде $\lambda=0.05$. Колкаво е математичкото очекување и стандардната девијација на векот на траење на случајно избрана сијалица?

2.2.17. Во една валавница на челични слапови излезниот производ е лим чија дебелина е случајна променлива со рамномерна распределба помеѓу 150 и 200 mm. Лимовите со дебелина помала од 160 mm треба не ги задоволуваат барањата на нарачателот.

а) Да се определи математичкото очекување и стандардната девијација на дебелината на произведениот лим.

б) Колкав процент од производството на валавницата не го задоволува барањето на нарачателот?

2.2.18. Нека X е случајна променлива со густина на распределба

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1,1) \\ ax^2 + bx + c, & x \in (-1,1) \end{cases} .$$

Да се определи математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X. Да се определат вредностите на a, b и c ако $MX = 0$ и $DX = 1/2$.

2.2.19. Векот на траење на стандардна неонска цефка е случајна променлива со нормална распределба со параметри $\mu = 7000$ часови и $\sigma = 1000$ часови. Еден производител објавува дека произвел неонска цефка чиј век на траење е случајна променлива со нормална распределба со параметри $\mu = 7500$ часови и $\sigma = 1200$ часови. Која цефка е поверојатно дека ќе има век на траење

а) поголем од 9000 часови;

б) помал од 5000 часови?

2.3 ДВЕ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

2.3.1. Во една кутија се наоѓаат пет нумерирани топчиња. На случаен начин се извлекуваат едно по друго две топчиња и нека случајните променливи X_1 и X_2 го означуваат бројот на првото, односно второто топче. Да се определи дали овие две случајни променливи се независни ако првото извлечено топче:

а) се враќа во кутијата;

б) не се враќа во кутијата.

Решение.

а) Според класичната дефиниција на веројатност, законите на распределба на случајните променливи X_1 и X_2 се

$$X_1 = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \quad \text{и} \quad X_2 = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right),$$

а, за заедничкиот закон на распределба, имаме $P(X_1 = i \wedge X_2 = j) = \frac{1}{\overline{V}_5^2} = 1/25 = 0.04$, $i, j = 1, 2, \ldots 5$, т.е.,

		Y				
		1	2	3	4	5
X	1	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
	2	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
	3	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
	4	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
	5	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

Од овде, $P(X_1 = i \wedge X_2 = j) = \frac{1}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = j)$, $i, j = 1, 2, \ldots 5$. Значи случајните променливи X_1 и X_2 се меѓусебно независни.

б) Ако првото извлечено топче не се враќа во кутијата тогаш законот на распределба на случајната променлива X_1 не се менува, но во врска со X_2 имаме $P(X_2 = i) = \frac{4}{V_5^2} = \frac{4}{20}$. За заедничкиот закон на распределба имаме $P(X_1 = i \wedge X_2 = i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots 5$, бидејќи не е можно при првото и второто извлекување да извлечеме топче нумерирано со ист број. Затоа $P(X_1 = i \wedge X_2 = i) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{20} = P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = i)$, $i = 1, 2, \ldots 5$, односно случајните променливи X_1 и X_2 не се меѓусебно независни.

2.3.2. Реализирани се две серии од по четири фрлања на нумерирана коцка. Нека случајните променливи X и Y го означуваат бројот на шестки во првата и втората серија, соодветно. Да се определи: $P(X = Y)$, $P(X > Y | Y = 2)$ и $P(X > Y)$.

Решение. Разгледуваме две серии од по четири независни експерименти и при тоа регистрираме дали ќе се појави или не бројот шест, а веројатноста да се појави е $\frac{1}{6}$. Значи случајните променливи X и Y се со биномна распределба $B(4, 1/6)$. Уште повеќе тие се и независни меѓу себе. Тоа интуитивно е јасно бидејќи се работи за две серии експерименти при што едната не влијае на било кој начин на другата. Истото може математички да се потврди на сличен начин како во делот (а) од задачата 2.3.1.

а) Од независноста на настаните X и Y, како и од својствата на конјункција и дисјункција на две случајни променливи (аналогно со пресек и унија на случајни настани) следува

$$\begin{aligned}
&P(X = Y) = \\
&= P\left((X = 0 \wedge Y = 0) \vee (X = 1 \wedge Y = 1) \vee \cdots \vee (X = 4 \wedge Y = 4)\right) = \\
&= P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) + \cdots + P(X = 4)P(Y = 4) = \\
&= \sum_{i=0}^{4} \left[\binom{4}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-i} \right]^2 = \frac{1}{6^4} \cdot \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}^2 \cdot 5^{8-2i} = ???.
\end{aligned}$$

б) Според формулата за условна веројатност, $P(A|B) = P(AB)/P(B)$, имаме

$$\begin{aligned}
&P(X > Y|Y = 2) = \\
&= \frac{P(X > Y \wedge Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{P(X > 2)}{P(Y = 2)} = \frac{P(X = 3 \vee X = 4)}{P(Y = 2)} = \\
&= \frac{P(X = 3) + P(X = 4)}{P(Y = 2)} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0}{\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} = ?????.
\end{aligned}$$

в) Врз основа на објаснувањата во деловите (а) и (б), имајќи во предвид дека $P(X > 4) = 0$, имаме

$$\begin{aligned}
&P(X > Y) = \sum_{i=0}^{4} P(X > i \wedge Y = i) = \\
&= \sum_{i=0}^{4} P(X > i|Y = i)P(Y = i) = \sum_{i=0}^{4} P(X > i)P(Y = i) = \\
&= \sum_{i=0}^{3} \left[\sum_{j=i+1}^{4} \binom{4}{j} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{j} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-j} \right] \cdot \left[\binom{4}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-i} \right] = ??????.
\end{aligned}$$

2.3.3. Во една кутија се наоѓаат две бели и четири црни топчиња. На случаен начин, без враќање извлекуваме едно по друго две топчиња.

Нека случајните променливи X и Y го означуваат бројот на бели топчиња во првото и второто извлекување, соодветно. Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y.

Решение. Коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y се пресметува според формулата $\rho = \frac{MX \cdot MY - M(XY)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$. За да ги пресметаме големинита кои се потребни во оваа формула прво треба да ги определиме законите на распределба за случајните променливи X, Y и $X \cdot Y$. Случајните променливи X и Y можат да ги добијат само вредностите 0 и 1. Прво да го определиме нивниот заеднички закон на распредеба. Од содржината на кутијата следува дека

$$\begin{aligned}
P(X = 0 \wedge Y = 0) &= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}, \\
P(X = 1 \wedge Y = 0) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}, \\
P(X = 0 \wedge Y = 1) &= \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}, \\
P(X = 1 \wedge Y = 1) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15},
\end{aligned}$$

односно

		Y	
		0	1
X	0	6/15	4/15
	1	4/15	1/15

Од овде

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{i,j} = 0 \cdot 0 \cdot \frac{6}{15} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{15}.$$

Понатаму, од заедничкиот закон на распределба на случајните променливи X и Y следува

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{15} + \frac{4}{15} & \frac{4}{15} + \frac{1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

и

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{15} + \frac{4}{15} & \frac{4}{15} + \frac{1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Затоа

$$\begin{aligned}
&MX = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad MY = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\
&DX = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - (MX)^2 = \frac{2}{9}, \quad DY = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - (MX)^2 = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

и

$$\rho = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{15}}{\sqrt{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{2}{9}}} = -\frac{11}{45} \approx -0.244.$$

2.3.4. Во еден производствен процес случајната променлива X го означува бројот на машини кои се на располагање, а Y бројот на производи кои во истиот момент се обработуваат. Заедничкиот закон на распределба на случајните променливи X и Y даден е со следната табела.

		Y			
		1	2	3	4
	0	0.03	0.1	0.2	0.1
	1	0.05	0.08	0.1	0.05
X	2	0.03	0.01	0.05	0.05
	3	0	0.1	0.05	0

а) Да се определат маргиналните распределби на веројатностите на случајните променливи X и Y;

б) Да се определи распределбата на условните веројатностите на случајната променлива Y ако е познато дека $X = 1$, т.е., да се определи веројатноста дека во процесот на производство ќе се обработуваат 1, 2, 3 или 4 производи, ако се знае дека на располагање ќе биде една машина;

в) Да се определи распределбата на условните веројатностите на случајната променлива Y ако е познато дека $X > 1$, т.е., да се определи веројатноста дека во процесот на производство ќе се обработуваат 1, 2, 3 или 4 производи, ако се знае дека на располагање ќе биде повеќе од една машина;

г) Дали случајните променливи X и Y се независни;

д) Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y.

Решение.

а) За да ја добиеме маргиналната распределба на веројатностите на случајната променлива X потребно е да определиме $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ и $P(X = 4)$. Имајќи во предвид дека X може да добие вредност 0 во ситуација кога Y добива вредност 1, 2, 3 или 4, веројатноста

$P(X=0)$ ја пресметуваме како збир од веројатностите на четири взаемно дисјунктни настани, т.е.

$$\begin{aligned}
&P(X=0)=\\
&=P\left((X=0\wedge Y=1)\vee(X=0\wedge Y=2)\vee\cdots\vee(X=0\wedge Y=4)\right)=\\
&=P(X=0\wedge Y=1)+P(X=0\wedge Y=2)+\cdots+P(X=0\wedge Y=4)=\\
&=0.03+0.1+0.2+0.1=0.43.
\end{aligned}$$

На сличен начин се добива дека

$$\begin{aligned}
&P(X=1)=0.05+0.08+0.1+0.05=0.28,\\
&P(X=2)=0.03+0.01+0.05+0.05=0.14 \text{ и}\\
&P(X=3)=0+0.1+0.05+0=0.15,
\end{aligned}$$

односно, маргиналната распределба на веројатностите на X е

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ 0.43 & 0.28 & 0.14 & 0.15\end{pmatrix}.$$

Аналогно

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.11 & 0.29 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}.$$

б) Според формулата за условна веројатност $P(A|B)=P(AB)/P(B)$, имајќи ги во предвид заедничката распределба на случајните променливи X и Y, како и распределбата на случајната променлива X добиена во делот (а), добиваме

$$\begin{aligned}
P(Y=1|X=1)&=\frac{P(Y=1\wedge X=1)}{P(X=1)}=\frac{0.05}{0.28}=\frac{5}{28},\\
P(Y=2|X=1)&=\frac{P(Y=2\wedge X=1)}{P(X=1)}=\frac{0.08}{0.28}=\frac{8}{28},\\
P(Y=3|X=1)&=\frac{P(Y=3\wedge X=1)}{P(X=1)}=\frac{0.1}{0.28}=\frac{10}{28} \text{ и}\\
P(Y=4|X=1)&=\frac{P(Y=4\wedge X=1)}{P(X=1)}=\frac{0.05}{0.28}=\frac{5}{28},
\end{aligned}$$

односно

$$(Y|X=1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{5}{28} & \frac{8}{28} & \frac{10}{28} & \frac{5}{28}\end{pmatrix}.$$

в) Аналогно на делот (б) имаме

$$\begin{aligned}
P(Y=1|X>1) &= \frac{P(Y=1 \wedge X>1)}{P(X>1)} = \\
&= \frac{P((Y=1 \wedge X=2) \vee (Y=1 \wedge X=3)}{P(X=2 \vee X=3)} = \\
&= \frac{P(Y=1 \wedge X=2) + P(Y=1 \wedge X=3)}{P(X=2)+P(X=3)} = \\
&= \frac{0.03+0}{0.14+0.15} = \frac{3}{29}, \\
P(Y=2|X>1) &= \frac{P(Y=2 \wedge X>1)}{P(X>1)} = \frac{0.01+0.1}{0.14+0.15} = \frac{11}{29}, \\
P(Y=3|X>1) &= \frac{P(Y=3 \wedge X>1)}{P(X>1)} = \frac{0.05+0.05}{0.14+0.15} = \frac{10}{29}, \\
P(Y=4|X>1) &= \frac{P(Y=4 \wedge X>1)}{P(X>1)} = \frac{0.05+0}{0.14+0.15} = \frac{5}{29},
\end{aligned}$$

и

$$(Y|X>1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{28} & \frac{11}{28} & \frac{10}{28} & \frac{5}{28} \end{pmatrix}.$$

г) Од $P(X=0 \wedge Y=1) = 0.03$, $P(X=0) = 0.43$ и $P(Y=1) = 0.11$ следува дека $P(X=0 \wedge Y=1) \neq P(X=0)P(Y=1)$, односно случајните променливи X и Y се зависни меѓу себе.

д) Од заедничката распределба на случајните променливи X и Y следува

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j p_{i,j} = 0 \cdot 1 \cdot 0.03 + 0 \cdot 2 \cdot 0.1 + 0 \cdot 3 \cdot 0.2 + 0 \cdot 4 \cdot 0.1 +$$
$$+ 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + \cdots + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 3 \cdot 0.05 + 3 \cdot 4 \cdot 0 = 2.61.$$

Понатаму, знаејќи ги распределбите на веројатностите на случајните променливи X и Y, слично како во решението на задача 2.3.3, добиваме

$$\begin{aligned}
MX &= 1.01, \quad DX = 1.1699, \\
MY &= 2.69, \quad DY = 0.8339,
\end{aligned}$$

и коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y е

$$\rho = \frac{MX \cdot MY - M(XY)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} \approx 0.108.$$

2.3.5. Заедничкиот закон на распределба на случајните променливи X и Y даден е со следната табела

		Y		
		-1	0	1
X	0	0	1/3	0
	1	1/3	0	1/3

Да се покаже дека случајните променливи X и Y не се корелирани меѓу себе, т.е., дека нивниот коефициентот на корелација е нула, но дека се меѓусебно зависни.

Решение. На сличен начин како во решението на задача 2.3.4 добиваме

$$M(XY) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Понатаму, маргиналните распределби на веројатностите на случајните променливи X и Y се

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Од овде,

$$MX = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$
$$MY = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

односно $\rho = 0$. Од друга страна, од

$$P(X = 0 \wedge Y = 0) = 1/3 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = 1/3 \cdot 1/3,$$

следува дека случајните променливи X и Y се зависни меѓу себе.

2.3.6. Нека $A(x, y)$ е случајно избрана точка од квадратот $[0, 1] \times [0, 1]$, т.е., нека x и y се случајно избрани броеви од сегментот $[0, 1]$. Кои парови од следните случајни променливи се независни: $X_1 = x^2$; $X_2 = y^2$ и $X_3 = x + y$?

Решение. За да одговориме на прашањето потребно е прво да ги определиме функциите на распределба $F_1(t_1)$, $F_2(t_2)$ и $F_3(t_3)$ на случајните променливи X_1, X_2 и X_3, соодветно. Сега ќе го искористиме принципот на геометриска веројатност. За определување на $F_1(t_1) = P(X_1 \leq t_1) = P(x^2 \leq t_1) = P(x \leq \sqrt{t_1})$

просторот од елементарни настани е $\Omega_1 = [0,1]$, а множеството од поволни настани е $A_1 = \{x \in \Omega_1 : x \leq \sqrt{t_1}\}$. Затоа

$$F_1(t_1) = \frac{m(A_1)}{m(\Omega_1)} = \begin{cases} 0, & t_1 < 0 \\ \sqrt{t_1}, & 0 \leq t_1 \leq 1 \\ 1, & t_1 > 1 \end{cases}.$$

Слично $F_2(t_2) = F_1(t_2)$. Понатаму, $F_3(t_3) = P(X_3 \leq t_3) = P(x + y \leq t_3)$, па просторот од елементарни настани е $\Omega_3 = [0,1] \times [0,1]$, а множеството од поволни настани е $A_3 = \{(x,y) \in \Omega_3 : x + y \leq \sqrt{t_3}\}$. Затоа ако $t_3 < 0$ тогаш $A_3 = \varnothing$ и $F_3(t_3) = 0$. Слично, ако $t_3 \geq 2$ тогаш $A_3 = \Omega_3$ и $F(t_3) = 1$. Сега, ако $0 \leq t_3 \leq 1$ тогаш множеството од поволни настани се состои од точките од затемнетиот дел од рамнината на цртеж ??, па $m(A_3) = t_3^2/2$ и $F(t_3) = t_3^2/2$. На сличен начин, за $1 < t_3 < 2$ имаме A_3 како на цртеж ??? и $F_3(t_3) = 1 - (2 - t_3)^2/2$. Затоа

$$F_3(t_3) = \frac{m(A_3)}{m(\Omega_3)} = \begin{cases} 0, & t_1 \leq 0 \\ t_3^2/2, & 0 < t_1 \leq 1 \\ 1 - (2 - t_3)^2/2, & 1 < t_3 \leq 2 \\ 1 & t_1 > 2 \end{cases}.$$

За заедничката функција на распределба на случајните променливи X_1 и X_2, $F_{12}(t_1, t_2) = P(X_1 \leq t_1 \wedge X_2 \leq t_2) = P(x \leq \sqrt{t_1} \wedge y \leq \sqrt{t_2})$, просторот од елементарни настани е $\Omega_{12} = [0,1] \times [0,1]$. Понатаму, поради $x, y \in [0,1]$ множеството од поволни настани $A_{12} = \varnothing$ во случаите кога $t_1 < 0$ или $t_2 < 0$, и $A_{12} = \Omega_{12}$ кога $t_1 > 1$ и $t_2 > 1$. За случаите кога $t_1 \in [0,1]$ или $t_2 \in [0,1]$ важи следната анализа:

$$A_{12} = \begin{cases} \big[0, \sqrt{t_1}\big] \times [0,1], & t_1 \in [0,1] \text{ и } t_2 \geq 1 \quad (\text{цртеж ??}) \\ [0,1] \times [0, \sqrt{t_2}], & t_1 \geq 1 \text{ и } t_2 \in [0,1] \quad (\text{цртеж ??}) \\ \big[0, \sqrt{t_1}\big] \times [0, \sqrt{t_2}], & t_1 \in [0,1] \text{ и } t_2 \in [0,1] \quad (\text{цртеж ??}) \end{cases}.$$

Согласно тоа

$$F_{12}(t_1, t_2) = \frac{m(A_{12})}{m(\Omega_{12})} = \begin{cases} 0, & t_1 < 0 \text{ или } t_2 < 0 \\ \sqrt{t_1}, & t_1 \in [0,1] \text{ и } t_2 \geq 1 \\ \sqrt{t_2}, & t_1 \geq 1 \text{ и } t_2 \in [0,1] \\ \sqrt{t_1 t_2} & t_1 \in [0,1] \text{ и } t_2 \in [0,1] \\ 1 & t_1 > 1 \text{ и } t_2 > 1 \end{cases}.$$

Од овде лесно се заклучува дека $F_{12}(t_1, t_2) = F_1(t_1) \cdot F_2(t_2)$, што значи дека случајните променливи X_1 и X_2 се независни помеѓу себе.

Случајните променливи X_1 и X_3 се зависни помеѓу себе бидејќи $F_{13}(t_1, t_3) = P(X_1 \leq t_1 \wedge X_3 \leq t_3)$

2.3.7. Заедничката густина на распределба на непрекинатите случајни променливи X и Y е

$$p(x,y) = \begin{cases} Cx, & (x,y) \in [0,y] \times [0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [0,y] \times [0,1] \end{cases} .$$

а) Да се определи вредноста на параметарот C;

б) Да се определи заедничката функција на распределба на случајните променливи X и Y;

в) Да се определат маргиналните густини на распределба на случајните променливи X и Y;

г) Да се определи условната густина на распределба за случајната променлива X при позната вредност на случајната променлива Y;

д) Дали случајните променливи X и Y се независни;

ѓ) Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y.

Решение.

а) Вредноста на параметарот C ќе ја определиме од условот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1.$$

Интегрирајќи ја густината $p(x,y)$ на триаголната област дадена на цртежот ? и дефинирана со $0 \le x \le y$ и $0 \le y \le 1$, добиваме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^y Cx\ dxdy = \int_0^1 \left(C\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^y dy =$$
$$= \int_0^1 C\frac{y^2}{2}dy = C\frac{y^3}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{C}{6}.$$

Користејќи го горенаведениот услов имаме $C/6 = 1$, односно $C = 6$.

б) Заедничката функција на распределба на случајните променливи X и Y определена е со

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv.$$

Вредноста на овој двоен интеграл зависи од вредностите на x и y. Постојат пет можности кои се илустрирани на соодветни цртежи и проблемот се сведува на интегрирање на густината $p(u,v)$ на потемно исенчената област од сртежите. Поточно

б1) $x \leq 0$ или $y \leq 0: \; F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0 \cdot dudv = 0;$

б2) $0 < x \leq y$ и $0 < y \leq 1: \; F(x,y) = \int_{0}^{x}\int_{u}^{y} 6u\, dvdu = x^2(3y-2x);$

б3) $0 < x \leq 1$ и $1 < y: \; F(x,y) = \int_{0}^{x}\int_{u}^{1} 6u\, dvdu = x^2(3-2x);$

б4) $y < x$ и $0 < y \leq 1: \; F(x,y) = \int_{0}^{y}\int_{u}^{y} 6u\, dvdu = y^3;$

б5) $1 < x$ и $1 < y: \; F(x,y) = \int_{0}^{1}\int_{u}^{1} 6u\, dvdu = 1.$

в) Според дефиницијата на маргиналната густина на распределба, за $x \in [0,1]$ следува

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = \int_{x}^{1} 6x\; dy = 6xy|_{x}^{1} = 6x(1-x),$$

додека за $x \notin [0,1]$, $p_X(x) = 0$. Слично, за $y \in [0,1]$,

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \int_{0}^{y} 6x\; dx = 3x^2\big|_{0}^{y} = 3y^2$$

и за $y \notin [0,1]$, $p_Y(y) = 0$.

г) Условната густина на распределба за случајната променлива X при позната вредност на случајната променлива Y е дефинирана со

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)},$$

па затоа за $(x,y) \in [0,y] \times [0,1]$ имаме $p_{X|Y=y}(x) = \frac{2x}{y^2}$, и за $(x,y) \notin [0,y] \times [0,1]$, $p_{X|Y=y}(x) = 0$.

д) Од

$$p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 18xy^2(1-x), & (x,y) \in [0,y] \times [0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [0,y] \times [0,1] \end{cases}$$

следува дека $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$, односно случајните променливи X и Y се зависни меѓу себе.

ѓ) За пресметка на коефициентот на корелација потребно ни е

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, p(x,y)\, dxdy = \int_0^1\int_0^y 6x^2y\, dxdy =$$
$$= \int_0^1 2x^3y\Big|_0^y dy = \int_0^1 2y^4 dy = \frac{2y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Понатаму, слично како во решението на задача 2.2.4, $MX = \frac{1}{2}$, $MY = \frac{3}{5}$, $DX = \frac{1}{20}$, $DY = \frac{9}{25}$ и $\rho = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2.3.8. Да се определи заедничката густина на распределба на случајните пременливи X и Y ако заедничката функција на распределба е

$$F(x,y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & 0 \le x \le \pi/2 \text{ и } -\pi/2 \le y \le 0, \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}.$$

Решение. Заедничката густина на распределба се определува на следниот начин:

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} -\cos x \sin y, & 0 \le x \le \pi/2 \text{ и } -\pi/2 \le y \le 0, \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}.$$

Дополнителни задачи

2.3.9. Случајната променлива X има математичко очекување 2 и дисперзија 3. Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и $Y = -4X + 1$.

2.3.10. Од шпил со 52 карти се извлекуваат 5. Нека случајните променливи X и Y го означуваат бројот на "асови" и "дами" меѓу извлечените 5 карти. Да се определи заедничката распределба на овие две случајни променливи и нивниот коефициент на корелација.

2.3.11. Нека x и y се случајно избрани броеви од сегментот $[0, 1]$. Кои парови од следните случајни променливи се независни: $X_1 : x > 1/3$; $X_2 : y > 2/3$; $X_3 : x > y$ и $X_4 : x + y < 1$.

2.3.12. На патот од местото A до местото B има три семафори. Нека случајнта променлива X го означува бројот на црвени светла на семафорите при патување од A во B, а Y бројот на црвени светла на семафорите при патување од B во A. Едно испитување покажало дека овие две случајни променливи имаат заедничхка распределба дадена со табелата

		Y			
		0	1	2	3
	0	0.01	0.02	0.07	0.01
	1	0.03	0.06	0.1	0.06
X	2	0.05	0.12	0.15	0.08
	3	0.02	0.09	0.08	0.05

а) Да се определат маргиналните распределби на случајните променливи X и Y;

б) Ако се знае дека одејќи од A во B сме застанале на два "црвени" семафори, да се определи распределбата на случајната променлива Y;

в) Дали случајните променливи X и Y се независни;

г) Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y.

2.3.13. Еден автомобил се движи на релацијана на која има 4 семафори. Веројатноста дека секој од семафорите ќе покажува зелено светло кога автомобилот ќе пристигне до него изнесува 1/3. Да се определи законот на распределба на случајната променлива X која го означува бројот на семафори што ќе ги помине автомобилот до првото застанување. Потоа да се определат нејзиното математичко очекување и дисперзија.

2.3.14. Заедничката густина на распределба на непрекинатите случајни променливи X и Y е

а) $p_1(x,y) = \begin{cases} Cx, & (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [0,1]\times[0,1] \end{cases}$;

б) $p_2(x,y) = \begin{cases} x + Cy, & (x,y) \in [1,2]\times[0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [0,y]\times[0,1] \end{cases}$;

в) $p_3(x,y) = \begin{cases} Cxy, & (x,y) \in [0,y]\times[0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [0,y]\times[0,1] \end{cases}$.

За секој од овие три случаи

1) Да се определи вредноста на параметарот C;
2) Да се определат маргиналните распределби на случајните променливи X и Y;
3) Да се определи условната густина на распределба за случајната променлива X при позната вредност на случајната променлива Y;
4) Дали случајните променливи X и Y се независни;
5) Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y.

2.3.15. За случајните променливи со заедничка функција на распределба како во задача 2.3.8 да се реализираат истите барања како во деловите (б), (в), (г) и (д) од задача 2.3.14.

2.4 ФУНКЦИИ ОД СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

2.4.1. Нека случајната променлива X има закон на распределба

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Да се определи законот на распределба на случајните променливи $Y_1 = 1+X$ и $Y_2 = X^2$.

Решение. Случајната променлива Y_1 може да добие некоја од вредностите -1, 0, 1 или 2, со веројатност

$$P(Y_1 = -1) = P(1+X = -1) = P(X = -2) = 0.3,$$
$$P(Y_1 = 0) = P(1+X = 0) = P(X = -1) = 0.1,$$
$$P(Y_1 = 1) = P(1+X = 1) = P(X = 0) = 0.2,$$
$$P(Y_1 = 2) = P(1+X = 2) = P(X = 1) = 0.4,$$

т.е., случајната променлива Y_1 има ист закон на распределба како и случајната променлива X. Понатаму, случајната променлива Y_2 може да добие некоја од вредностите 0, 1 или 4, со веројатност

$$\begin{aligned}
P(Y_2 = 0) &= P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0.2, \\
P(Y_2 = 1) &= P(X^2 = 1) = P(X = 1 \wedge X = -1) = \\
&= P(X = 1) + P(X = -1) = 0.4 + 0.1 = 0.5, \\
P(Y_2 = 2) &= P(X^2 = 4) = P(X = -2) = 0.3,
\end{aligned}$$

т.е., случајната променлива Y_1 има закон на распределба

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

2.4.2. Нека се дадени случајните променливи X и Y со следните закони на распределба на веројатностите

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.25 & 0.35 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Да се пресмета $M(3X/4)$, $D(3X/4)$, $M(XY)$ и $M(X+Y)$.

Решение. Случајната променлива $3X/4$ може да добие некоја од вредностите $\frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \cdot 0 = 0$, $\frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ или $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$. При тоа

$$P\left(\frac{3X}{4} = -\frac{3}{4}\right) = P(X = -1) = 0.3, \quad P\left(\frac{3X}{4} = 0\right) = P(X = 0) = 0.1,$$

$$P\left(\frac{3X}{4} = \frac{3}{4}\right) = P(X = 1) = 0.25, \quad P\left(\frac{3X}{4} = \frac{3}{2}\right) = P(X = 0) = 0.35.$$

Затоа

$$\frac{3X}{4} = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 3/4 & 3/2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.25 & 0.35 \end{pmatrix},$$

$$M\left(\frac{3X}{4}\right) = -\frac{3}{4} \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 + \frac{3}{4} \cdot 0.25 + \frac{3}{2} \cdot 0.35 = \frac{39}{80}$$

и

$$D\left(\frac{3X}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0.3 + 0^2 \cdot 0.1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0.25 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 0.35 - \left(\frac{39}{80}\right)^2 = \frac{5499}{6400}.$$

Понатаму, случајната променлива XY може да добие некоја од вредностите -4, -2, 0, 2, 4 или 8, при што

$$\begin{aligned}
P(XY=-4) &= P(X=-1 \wedge Y=4) = P(X=-1)P(Y=4) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18,\\
P(XY=-2) &= P(X=-1 \wedge Y=2) = P(X=-1)P(Y=2) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03,\\
P(XY=0) &= P(X=0 \vee Y=0) = P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0)P(Y=0) =\\
&= 0.1+0.3-0.1 \cdot 0.3 = 0.37,\\
P(XY=2) &= P(X=1 \wedge Y=2) = P(X=1)P(Y=2) = 0.25 \cdot 0.1 = 0.025,\\
P(XY=4) &= P((X=1 \wedge Y=4) \vee (X=2 \wedge Y=2)) =\\
&= P(X=1)P(Y=4)+P(X=2)P(Y=2) =\\
&= 0.25 \cdot 0.6 + 0.35 \cdot 0.1 = 0.185,\\
P(XY=8) &= P(X=2 \wedge Y=4) = P(X=2)P(Y=4) = 0.35 \cdot 0.6 = 0.21.
\end{aligned}$$

Значи

$$XY = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0.18 & 0.03 & 0.18 & 0.025 & 0.185 & 0.21 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M(XY) &= (-4) \cdot 0.18 + (-2) \cdot 0.03 + 0 \cdot 0.18 + 2 \cdot 0.025 + 4 \cdot 0.185 + 8 \cdot 0.21 =\\
&= 1.69
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
D(XY) &= (-4)^2 \cdot 0.18 + (-2)^2 \cdot 0.03 + 0^2 \cdot 0.18 + 2^2 \cdot 0.025 + 4^2 \cdot 0.185+\\
&+ 8^2 \cdot 0.21 - 1.69^2 = 16.6439.
\end{aligned}$$

Слично се добива дека законот на распределба на случајната променлива $X+Y$ е

$$X+Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.09 & 0.03 & 0.105 & 0.115 & 0.205 & 0.095 & 0.15 & 0.21 \end{pmatrix},$$

математичкото очекување е $M(X+Y) = 3.25$ и дисперзијата $D(X+Y) = 4.7675$.

2.4.3. Точно еден од шест клучеви отклучува дадена брава. Ако клучевите ги пробувате еден по еден кој е најверојатниот број обиди пред да се отклучи бравата.

Решение. Веројатноста дека случајно избран клуч, од дадените шест, ја отклучува бравата изнесува $p = 1/6$. Нека случајната промелнива X го означува редниот број на обидот при кој е пронајден клучот што ја отклучува бравата. Значи X може да добие некоја од вредностите 1, 2, 3, 4, 5 или 6, и има геометриска ??? распределба бидејќи за вистинскиот клуч да биде пронајден при четвртиот обид потребно е првите три обиди да бидат неуспешни. Затоа $P(X=i)=(1-p)^{i-1}p=5^{i-1}/6^i$, $i=1,2,\ldots,6$, т.е.,

$$MX=\sum_{i=1}^{6} i\cdot P(X=i)=\sum_{i=1}^{6} i\cdot\frac{5^{i-1}}{6^i}=\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{6^2}+\cdots+6\cdot\frac{5^5}{6^6}\approx 1.98122.$$

Односно, најверојатниот број обиди пред да се отклучи бравата изнесува 1.98122.

2.4.4. Нека промената на цената на акциите на берзата во текот на еден ден е случајна променлива со распределба

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Да се определи распределбата, математичкото очекување и стандардната девијација на промената на цената на акциите после два последователни и независни денови.

Решение. Нека промената на цената на акциите во текот на првиот и вториот ден ги означиме со X_1 и X_2, соодветно. Тогаш, промената на цената после два последователни и независни денови претставува збир на случајните променливи X_1 и X_2. Според условот на задачата X_1 и X_2 имаат закон на распределба на веројатноста еднаков со законот на распределба на случајната променлива X. Затоа, слично како во решението на задачата 2.4.2 добиваме

$$X_1+X_2=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/64 & 1/8 & 5/16 & 9/32 & 3/16 & 1/16 & 1/64 \end{pmatrix},$$

$M(X_1+X_2)=0.75$ и $\sqrt{D(X_1+X_2)}\approx 1.21191$.

2.4.5. Да се определи густината на распределба на збирот на две независни случајни променливи

а) со рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$;

б) со експоненцијална распределба со параметар λ;

в) со нормална распределба со параметри $\mu=0$ и $\sigma=1$.

Решение.

а) Нека X и Y се случајни променливи со рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$, т.е., имаат густини на распределба

$$p_X(x)=p_Y(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}.$$

Тогаш $Z = X + Y$ има густина на распределба

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-y)p_Y(y)dy.$$

Бидејќи $p_Y(y) = 1$ за $y \in [0,1]$ и $p_Y(y) = 0$ за $y \notin [0,1]$ добиваме

$$p_Z(z) = \int_0^1 p_X(z-y)dy.$$

Сега, со смената $t = z - y$ имаме $p_Z(z) = \int_{z-1}^{z} p_X(t)dt$. Значи, за $z < 0$ и $z > 2$, густината p_X ја интегрираме на подрачје на кое има вредност 0, па затоа $p_Z(z) = 0$. Понатаму, ако $0 \le z \le 1$ тогаш $z - 1 \le 0$ и

$$p_Z(z) = \int_{z-1}^{z} p_X(t)dt = \int_0^z p(t)dt = \int_0^z 1 \cdot dt = z.$$

На сличен начин, ако $1 \le z \le 2$ тогаш $0 \le z - 1 \le 1$ и

$$p_Z(z) = \int_{z-1}^{z} p_X(t)dt = \int_{z-1}^{1} p(t)dt = \int_{z-1}^{1} 1 \cdot dt = 2 - z.$$

Со тоа добивме дека збирот на две независни случајни променливи со рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$ има густина

$$p_Z(z) = \begin{cases} z, & z \in [0,1] \\ 2 - z, & z \notin [1,2] \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}.$$

б) Нека X и Y се случајни променливи со експоненцијална распределба со параметар λ, т.е., имаат густини на распределба

$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогаш случајната променлива $Z = X + Y$ има густина на распределба таква што за $z \ge 0$,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-y)p_Y(y)dy = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \end{aligned}$$

а за $z < 0$, $p_Z(z) = 0$. Следува

$$p_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

в) Сега, нека X и Y се две независни случајни променливи со стандардизирана нормална распределба, т.е., со густини

$$p_X(x) = p_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Тогаш за густината на нивниот збир $Z = X + Y$ имаме

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-y) p_Y(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-y)^2/2} e^{-y^2/2} dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-z/2)^2} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/4} \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-z/2)^2} dy \right].$$

Изразот во заградите има вредност 1 бидејќи подинтегралната функција е густина на нормална распределба со параметри $\mu = 0$ и $\sigma = \sqrt{2}$. Следува

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4.}$$

2.4.6. Случајните променливи X и Y се независни со рамномерна распределба на интервалите $(0, 2)$ и $(3, 4)$, соодветно. Да се определи распределбата, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $Z = XY$.

Решение. Случајните променливи X и Y се независни и имаат густини на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [0, 2] \\ 0, & x \notin [0, 2] \end{cases} \quad \text{и} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1, & x \in [3, 4] \\ 0, & x \notin [3, 4] \end{cases}$$

Тогаш заедничката функција на распределба е

$$F(x, y) = P(X < x \wedge Y < y) = P(X < x) P(Y < y) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{y} p_Y(t) dt$$
$$= \begin{cases} xy/2, & (x, y) \in (0, 2) \times (3, 4) \\ x/2, & (x, y) \in (0, 2) \times (4, \infty) \\ y, & (x, y) \in (2, \infty) \times (3, 4) \\ 1, & (x, y) \in (2, \infty) \times (4, \infty) \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases},$$

а заедничката густина на распределба е

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 1/2, & (x, y) \in (0, 2) \times (3, 4) \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}.$$

На тој начин за математичкото очекување на случајната променлива $Z = f(X,Y)$, $f(x,y) = xy$, добиваме

$$MZ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)f(x,y)\,dxdy = \int_3^4 \int_0^2 \frac{1}{2}xy\,dxdy = \frac{7}{2},$$

а за дисперзијата

$$DZ = MZ^2 - (MZ)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)f^2(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_3^4 \int_0^2 \frac{1}{2}x^2y^2\,dxdy = \frac{148}{9} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{151}{36}.$$

2.4.7. Случајната променлива X е со нормална распределба. Да се определат густините на случајните променливи $Y_1 = aX + b$ и $Y_2 = e^X$.

Решение. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Понатаму, функцијата $f_1(x) = ax + b$ има инверзна функција $f_1^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ и затоа

$$p_{Y_1}(x) = \left|(f_1^{-1}(x))'\right| \cdot p_X\left(f_1^{-1}(x)\right) = \frac{1}{|a|}\,p_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}},$$

односно Y_1 е случајна променлива со нормална распределба со математичко очекување $a\mu + b$ и стандардна девијација $a\sigma$.

На сличен начин, за случајната променлива Y_2 ја разгледуваме функција $f_2(x) = e^x$ со нејзина инверзна $f_2^{-1}(x) = \ln x$ и добиваме

$$p_{Y_2}(x) = \left|(f_2^{-1}(x))'\right| \cdot p_X\left(f_2^{-1}(x)\right) = \frac{1}{|x|}\,p_X(\ln x) = \frac{1}{|x|\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$
$$= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\,\frac{1}{|x|\sigma\sqrt{2\pi}}\,x^{-\frac{\ln x-2\mu}{2\sigma^2}}.$$

Оваа густина се нарекува логаритамска нормална густина.

2.4.8. Дневната потрошувачка на пакети хартија во еден сметачки центар е случајна промелива X со експоненцијална распределба со математичко очекување 5. Еден пакет хартија кошта 2000 денари, а и во случај да не се потроши хартија има сметачкиот центар има фиксни трошоци од 700 денари. Да се определи густината на распределбата на дневните трошоци за хартија во сметачкиот центар и веројатноста дека дневните трошоци за хартија ќе бидат поголеми од 12000 денари.

Решение. Дневната потрошувачка на хартија има експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1/5$ чија вредност се добива од условот $MX = 1/\lambda = 5$.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{\lambda}{5}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Според условот на задачата трошоците за хартија во сметачкиот центар можат да се пресметаат според формулата $Y = 2000X + 700$ денари. Постапувајќи слично како во решението на задача 2.4.7 за густината на распределбата на трошоци добиваме

$$p_Y(x) = \frac{1}{2000}\, p_X\left(\frac{x-700}{2000}\right) = \begin{cases} \frac{1}{10000}e^{-\frac{x-700}{10000}}, & x \geq 700 \\ 0, & x < 700 \end{cases}.$$

Веројатноста дека трошоците ќе бидат поголеми од 17000 денари изнесува

$$P(Y > 17000) = 1 - P(Y \leq 17000) = 1 - \int_{-\infty}^{17000} p_Y(x)dx =$$
$$= 1 - \frac{1}{10000}\int_{700}^{17000} e^{-\frac{x-700}{10000}} \approx 0.323.$$

2.4.9. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p(x) = \begin{cases} 0.5x + 0.5, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Да се определи густината на распределба на случајната променлива $Y = 1 - X^2$.

Решение. Функцијата на распределба на случајната променлива X е

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & x \leq -1 \\ 0.25x^2 + 0.5x + C, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{array} \right\} =$$
$$= \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.25x^2 + 0.5x + 0.25, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}.$$

Овде вредноста на константата C се добива од условот $F_X(-1) = 0$ или $F_X(1) = 1$. Понатаму, графикот на функцијата Y даден е на цртеж ? и од него може да се заклучи дека за $y \leq 0$

$$Y \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X \leq x_1 \;\vee\; X \geq x_2,$$

односно

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq x_1 \vee X \geq x_2) = P(X \leq x_1) + P(X \geq x_2) = \\ &= F_X(x_1) + 1 - F_X(x_2) = 0.\end{aligned}$$

Слично, за $0 < y \leq 1$ од цртеж ?? следува

$$Y \leq y \quad \Leftrightarrow \quad -1 < X \leq x_3 \;\; \vee \;\; x_4 \leq X < 1,$$

$x_3 = -\sqrt{1-y} \in (-1, 0]$ и $x_4 = \sqrt{1-y} \in [0, 1)$, т.е.,

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(-1 < X \leq x_3 \vee x_4 \leq X < 1) = \\ &= P(-1 < X \leq x_3) + P(x_4 \leq X < 1) = \\ &= F_X(x_3) - F_X(-1) + F_X(1) - F_X(x_4) = \\ &= 0.25x_3^2 + 0.5x_3 + 0.25 + 1 - (0.25x_4^2 + 0.5x_4 + 0.25) = \\ &= 1 - \sqrt{1-y}.\end{aligned}$$

Конечно, за $y > 1$ имаме дека неравенството $Y \leq y$ е еквивалентно со $x \in (-\infty, +\infty)$, па затоа

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\infty < X < +\infty) = 1.$$

Со тоа ја добивме функцијата на распределба на случајната променлива Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1 - \sqrt{1-y}, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & 1 < y \end{cases}$$

и соодветната густина

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y}}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}.$$

2.4.10. Функцијата $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ е густина на распределба на случајната променлива X (двострана експоненцијална распределба). Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива

$$Y = \begin{cases} 1, & X \leq 2 \\ -X + 3, & 2 \leq X \leq 5 \\ X - 7, & 5 \leq X \end{cases}.$$

Решение. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = \begin{cases} e^{x}/2, & x < 0 \\ e^{-x}/2, & x < 0 \end{cases}.$$

Графикот на функцијата Y даден е на цртеж ?? и од него може да се заклучи дека -2 е најмала вредност на функцијата Y. Затоа за $y \leq -2$ имаме

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \leq P(Y \leq -2) = 0.$$

Понатаму, за $-2 < y < 1$ според цртеж ??? следува дека неравенството $Y \leq y$ е еквивалентно со неравенството $x_1 \leq X \leq x_2$, односно

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(3 - y \leq X \leq 7 + y) = \\ &= \int_{3-y}^{7+y} p(x)\, dx = \int_{3-y}^{7+y} \frac{1}{2}e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{y-3} - e^{-y-7}\right]. \end{aligned}$$

Слично, за $y \geq 1$, според цртеж ??? се добива

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq x_3) = P(X \leq 7 + y) = \int_{-\infty}^{7+y} p(x)\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}\, dx + \int_{0}^{7+y} \frac{1}{2}e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{2}e^{-y-7}. \end{aligned}$$

На тој начин добивме дека функцијата на распределба на случајната променлива Y е

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2 \\ \frac{1}{2}\left[e^{y-3} - e^{-y-7}\right], & -2 < y < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-y-7}, & 1 \leq y \end{cases}.$$

Дополнителни задачи

2.4.11. Нека случајните променливи X и Y имаат закон на распределба

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Да се определи законот на распределба на случајните променливи $Z_1 = X + Y$, $Z_2 = 2Y - X$ и $Z_3 = XY$, како и соодветните математички очекувања и дисперзии.

2.4.12. Нека случајната променлива X има закон на распределба

$$X = \begin{pmatrix} \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Да се определи законот на распределба на случајната променлива $Y = \sin X$.

2.4.13. Една монета се фрла три пати. Нека X биде случајната променлива која го означува бројот на писма кои се појавиле при првите две фрлања, а Y, случајна променлива која го означува бројот на писма кои се појавиле при третото фрлање. Да се определи законот на распределба на случајните променливи $Z_1 = X + Y$, $Z_2 = X - Y$.

2.4.14. Случајната променлива X има густина на распределба $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Да се определи густината на распределба на случајната променлива $Y = 2 + X^3$.

2.4.15. Случајната променлива X е со рамномерна распределба на интервалот $(0, 1)$. Да се определи распределбата на случајните променливи а) $Y_1 = 2X - 1$ и $Y_2 = |X - 0.2|$.

2.4.16. Случајната променлива X е со рамномерна распределба на интервалот а) $(-\pi/2, \pi/2)$; б) $(0, \pi/2)$. Да се определи распределбата на случајната променлива $Y = \sin X$.

2.4.17. Случајната променлива X е со рамномерна распределба на интервалот $(0, 1)$. Да се определи распределбата на случајната променлива

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq 0.5 \\ X + 0.5, & x \geq 0.5 \end{cases}.$$

2.4.18. Дневната емисија на штетни гасови од една фабрика е случајна променлива со густина на распределба

$$p(x) = \begin{cases} 1/10, & x \in (0, 10) \\ 0, & x \notin (0, 10) \end{cases}.$$

По вградувањето на нов филтер емисијата на штетни гасови ќе се намали и со претходната емисија ќе биде поврзана со функцијата

$$Y = \begin{cases} \frac{X}{2}, & 0 < X \leq 5 \\ \frac{2X-5}{2}, & 5 \leq X < 10 \end{cases}.$$

Да се определи густината на распределба, математичкото очекување и стандардната девијација на емисијата на штетни гасови по вградувањето на нов филтер.

Глава 3

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ И ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

3.1 КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

3.1.1. Да се определат карактеристичната функција, математичкото очекување и дисперзија на случајна променлива

а) X_1 со униформна распределба;

б) X_2 со биномна распределба;

в) X_3 со геометриска распределба;

г) X_4 со Поасонова распределба;

д) X_5 со рамномерна распределба помеѓу a и b, $a < b$;

ѓ) X_6 со експоненцијална распределба;

е) X_7 со нормална распределба.

Решение.

а) Случајната променлива X_1 ги прима вредностите $1, 2, \ldots, n$, со веројатности $p_k = P(X_1 = k) = 1/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Со помош на изразот за сума на аритметичка прогресија, за карактеристичната функција добиваме

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1}(t) &= \sum_{k=1}^{n} e^{x_k ti} p_k = \sum_{k=1}^{n} e^{kti} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n}\left(e^{ti} + e^{2ti} + \cdots + e^{nti}\right) = \frac{e^{ti}(e^{nti}-1)}{n(e^{ti}-1)},\end{aligned}$$

за математичкото очекување

$$\begin{aligned}MX_1 &= \frac{1}{i}\cdot\varphi'_{X_1}(0) = \frac{1}{ni}\cdot\left(ie^{ti} + 2ie^{2ti} + \cdots + nie^{nti}\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{ni}\cdot(i + 2i + \cdots + ni) = \frac{1}{ni}\cdot n\left[i + \frac{i}{2}(n-1)\right] = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

и за дисперзијата

$$\begin{aligned}DX_1 &= MX_1^2 - (MX_1)^2 = \frac{1}{i^2}\cdot\varphi''_{X_1}(0) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{n}\cdot\left(e^{ti} + 2^2e^{2ti} + \cdots + n^2e^{nti}\right)\Big|_{t=0} - \frac{(n+1)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{n}\cdot\left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right) - \frac{(n+1)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.\end{aligned}$$

б) Случајната променлива X_2 ги прима вредностите $0, 1, \ldots, n$, со веројатности $p_k = P(X_2 = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $q = 1-p$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Со помош на биномната формула, за карактеристичната функција добиваме

$$\varphi_{X_2}(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{x_k ti} p_k = \sum_{k=0}^{n} e^{kti}\cdot\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = (p\,e^{ti} + q)^n,$$

за математичкото очекување

$$MX_2 = \frac{1}{i}\cdot\varphi'_{X_2}(0) = \frac{1}{i}\cdot n(p\,e^{ti}+q)^{n-1}\cdot p\,e^{ti}i\Big|_{t=0} = np$$

и за дисперзијата

$$\begin{aligned}DX_2 &= MX_2^2 - (MX_2)^2 = \frac{1}{i^2}\cdot\varphi''_{X_2}(0) - (np)^2 = \\ &= \left[np\,e^{ti}\left(p\,e^{ti}+q\right)^{n-2}\left(np\,e^{ti}+q\right)\right]\Big|_{t=0} - n^2p^2 = np\,q.\end{aligned}$$

в) Случајната променлива X_3 ги прима вредностите $1, 2, 3, \ldots$ со веројатности $p_k = P(X_3 = k) = q^{k-1}p$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Со помош на изразот за сума на геометриска прогресија, за карактеристичната функција добиваме

$$\varphi_{X_3}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{x_k ti} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kti} q^{k-1} p = \frac{p\, e^{ti}}{1 - q\, e^{ti}},$$

за математичкото очекување

$$MX_3 = \frac{1}{i} \cdot \varphi'_{X_3}(0) = \frac{1}{i} \cdot \left. \frac{p\, e^{ti} i}{(1 - q\, e^{ti})^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{p}$$

и за дисперзијата

$$\begin{aligned} DX_3 &= MX_3^2 - (MX_3)^2 = \frac{1}{i^2} \cdot \varphi''_{X_3}(0) - \frac{1}{p^2} = \\ &= \left. \frac{p\, e^{ti}(1 + q\, e^{ti})}{(1 - q\, e^{ti})^3} \right|_{t=0} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

г) Случајната променлива X_4 ги прима вредностите $0, 1, 2, \ldots$ со веројатности $p_k = P(X_4 = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Со помош на развојот $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, за карактеристичната функција добиваме

$$\begin{aligned} \varphi_{X_4}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{x_k ti} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kti} \cdot \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{ti}\right)^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{ti}} = e^{\lambda(e^{ti} - 1)}, \end{aligned}$$

за математичкото очекување

$$MX_4 = \frac{1}{i} \cdot \varphi'_{X_4}(0) = \frac{1}{i} \cdot \left. \lambda i e^{ti} e^{\lambda(e^{ti} - 1)} \right|_{t=0} = \lambda$$

и за дисперзијата

$$DX_4 = MX_4^2 - (MX_4)^2 = \frac{1}{i^2} \cdot \varphi''_{X_4}(0) - \lambda^2 = \lambda.$$

д) Случајната променлива X_5 има густина на распределба

$$p_{X_5}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}.$$

Од овде, за карактеристичната функција добиваме

$$\varphi_{X_5}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{txi} p_{X_5}(x)dx = \int_a^b e^{txi} \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{txi}}{ti}\bigg|_{x=a}^{x=b} =$$
$$= \frac{e^{bti} - e^{ati}}{(b-a)ti},$$

и слично како во претходните делови: $MX_5 = \frac{a+b}{2}$ и $DX_5 = \frac{(a-b)^2}{12}$.

ѓ) Случајната променлива X_6 има густина на распределба

$$p_{X_6}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

$\lambda > 0$. Од овде, за карактеристичната функција добиваме

$$\varphi_{X_6}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{txi} p_{X_6}(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{txi} \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx =$$
$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{(ti-\lambda)x}dx = \lambda \left. \frac{e^{(ti-\lambda)x}}{ti-\lambda} \right|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - ti},$$

и слично како во претходните делови: $MX_6 = 1/\lambda$ и $DX_6 = 1/\lambda^2$.

е) Овде ќе ја определиме карактеристичната функција на случајната променлива X_7 со нормална распределба, со математичко очекување $\mu = 0$ и стандардна девијација $\sigma = 1$. Обопштување на овој резултат за произволни μ и σ може да се направи со помош на задачата 3.1.2. Значи, случајната променлива X_7 има густина на распределба

$$p_{X_7}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2},$$

па за карактеристичната функција добиваме

$$\varphi_{X_7}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{txi} p_{X_6}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{txi}\, e^{-x^2/2}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(tx)dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin(tx)dx.$$

Последниот од овие интеграли има вредност 0 бидејќи подинтегралната функција е непарна, а интервалот по кој интегрираме, $(-\infty, +\infty)$, е симетричен. Од

$$\varphi_{X_7}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(tx)dx$$

со диференцирање по t добиваме

$$\begin{aligned}\varphi'_{X_7}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}x(-\sin(tx))dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin(tx)d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} u=\sin(tx) & dv = e^{-x^2/2}d\left(-x^2/2\right) \\ du = t\cos(tx)dx & v = e^{-x^2/2} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-x^2/2}\sin(tx)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-x^2/2}\cos(tx)dx\right] = \\ &= \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(tx)dx = -t\cdot\varphi_{X_7}(t),\end{aligned}$$

така што со решавање на диференцијалната равенка $\varphi'_{X_7}(t) + t\cdot\varphi_{X_7}(t)$ имаме $\varphi_{X_7}(t) = C\cdot e^{-t^2/2}$. Од условот $\varphi_{X_7}(0) = 1$ ја определуваме константата $C = 1$, и конечно

$$\varphi_{X_7}(t) = e^{-t^2/2}.$$

3.1.2. Да се определи карактеристичната функција на случајната променлива $Y = aX + b$, ако $\varphi_X(t)$ е карактеристичната функција на случајната променлива X.

Решение. Според дефиницијата за карактеристична функција на случајна променлива, имаме

$$\varphi_Y(t) = M\left(e^{tYi}\right) = M\left(e^{t(aX+b)i}\right) = M\left(e^{atXi}\cdot e^{bti}\right).$$

Од овде, користејќи го својството на математичкото очекување, $M(kX) = kMX$, следува

$$\varphi_Y(t) = e^{bti}\cdot M\left(e^{atXi}\right) = e^{bti}\cdot\varphi_X(at).$$

3.1.3. Да се определат карактеристичната функција, математичкото очекување и дисперзија на случајна променлива $Z = X + Y$ ако X и Y се взаемно независни случајни променливи со ист закон на распределба на веројатностите, и тоа

а) со биномна распределба;

б) со геометриска распределба;
в) со нормална распределба.

Решение. Да се потсетиме дека за две взаемно независни случајни променливи X и Y важи $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$. Заради тоа, користејќи ги карактеристичните функции добиени во деловите (б), (в) и (е) од задача 3.1.1 и соодветните ознаки, добиваме

а) $\varphi_Z(t) = (p\, e^{ti} + q)^{2n} = e^{kti} \cdot \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k}$.

б) $\varphi_Z(t) = \frac{p^2\, e^{2ti}}{1-2q\, e^{ti} - q^2 e^{2ti}}$.

в) $\varphi_Z(t) = e^{-t^2}$.

3.1.4. Да се определи густина на распределба, математичко очекување и дисперзија на случајната променлива X со карактеристична функција $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Решение. Според делот (ѓ) од задача 3.1.1 имаме дека карактеристичната функција на случајна променлива со експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1$ е $\frac{1}{1-ti}$. Затоа ако X_1 и X_2 се две взаемно независни случајни променливи со експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1$ тогаш, слично како во задача 3.1.3 имаме

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{1+t^2} = \varphi_X(t).$$

Значи $X = X_1 + X_2$ и согласно делот (б) од задача 2.4.5 густината на X е

$$p_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Понатаму, математичко очекување и дисперзија на случајната променлива X може да ги определиме директно, според нивната дефиниција, или со помош на карактеристичната функција на X,

$$MX = \frac{1}{i} \cdot \varphi_X'(0) = \frac{1}{i} \cdot \left. \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \right|_{t=0} = 0$$

и

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{1}{i^2} \cdot \varphi_X''(0) = 2.$$

Дополнителни задачи

3.1.5. Да се определат карактеристичната функција, математичкото очекување и дисперзија на дискретните случајни променливи

а) X_1 - бројот кој се појавува при фрлање на коцка нумерирана со броевите од 8 до 13;

б) X_2 - бројот на писма што се појавиле при 8 фрлања на монета;

в) X_3 - бројот на фрлања на вообичаено нумерирана коцка се до појавување на бројот 1 или 2.

3.1.6. Дадени се законите на распределба на веројатностите на взаемно независните дискретни случајни променливи X и Y

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Да се определат карактеристичните функции на случјните променливи X, Y и $Z = X + Y$.

3.1.7. За случајните променливи зададени со нивните закони на распределба

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

да се покаже дека имаат исти први и втори моменти (што повлекува и исто математичко очекување и дисперзија), но различни трети и четврти моменти.

3.1.8. Дадена е случајна променлива X со карактеристичната функција $\phi_X(t)$. Да се определи карактеристичната функција на случајните променливи $Y_1 = -X$, $Y_2 = X + 1$ и $Y_3 = 3X$.

3.1.9. ????? Да се определат карактеристичните функции на случајните променливи $Y_1 = X^2$ и $Y_2 = aX + b$, каде X има нормална распределба со математичко очекување 0 и стандардна девијација σ.

3.1.10. За случајнита променлива X со густина $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ да се определи соодветната карактеристична функција, математичко очекување и дисперзија.

3.1.11. Да се определи карактеристична функција, математичко очекување и дисперзија за непрекината случајна променлива со густина

а) $p_1(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$;

б) $p_2(x) = \begin{cases} |2 - x|, & x \in [1,3] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$;

в) $p_3(x) = \begin{cases} ae^{-ax}/2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad a > 0;$

г) $p_4(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}/2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

3.1.12. Да се определи функцијата на распределба, ако карактеристичната функција е

а) $\varphi(t) = \cos t$;

б) $\varphi(t) = \cos^2 t$;

в) $\varphi(t) = \frac{a}{1+it}$;

г) $\varphi(t) = \frac{\sin(at)}{at}$;

д) $\varphi(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

3.2 ЗАКОН НА ГОЛЕМИТЕ БРОЕВИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

3.2.1. Бројот на поени што ги добива еден студент на испит е случајна променлива што добива вредности од сегментот $[0, 100]$, со математичко очекување 70 и дисперзија 25.

а) Да се оцени веројатноста дека студентот ќе добие помеѓу 65 и 75 поени.

б) Ако 100 студенти го полагаат испитот, да се оцени веројатноста дека средната вредност на добиените поени ќе биде помеѓу 65 и 75.

Решение.

а) Нека X е случајна променлива која го означува бројот на поени што ги освоил студентот. Според условот на задачата $MX = 70$ и $DX = 20$. Треба да се определи следната веројатност

$$P(65 < X < 75) = P(-5 < X - 70 < 5) =$$
$$= P(|X - 70| < 5) = 1 - P(|X - 70| \geq 5).$$

Со помош на неравенството на Чебишев се добива

$$P(|X - 70| \geq 5) = P(|X - MX| \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2} = \frac{20}{5^2} = 0.8,$$

односно

$$P(65 < X < 75) \geq 1 - 0.8 = 0.2.$$

Значи, веројатноста дека студентот ќе добие помеѓу 65 и 75 поени е поголема или еднаква на 0.2.

б) Слично како во претходниот дел, X_i е случајна променлива која го означува бројот на поени што ги освоил i-тиот студент, $i = 1, 2, \dots, 100$. И овде $MX_i = 70$ и $DX_i = 20$, $i = 1, 2, \dots, 100$. Понатаму, случајната променлива Y нека ја означува средната вредност на поените што ги добиле 100-те студенти, т.е., $Y = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$. Според својствата на математичкото очекување и дисперзијата, имајќи во предвид дека случајните променливи X_i, $i = 1, 2, \dots, 100$, се независни, следува $MY = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} MX_i = 70$ и $DY = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} DX_i = 20$. Бидејќи $MX = MY$ и $DX = DY$, на ист начин како во претходниот дел од оваа задача добиваме дека $P(65 < X < 75) \geq 0.2$.

3.2.2. Веројатноста дека настанот A ќе се реализира (појави) при еден експеримент е $P(A) = p = 0.3$.

а) Да се оцени веројатноста дека при $n = 15000$ повторувања на експеримантот релативната фрекфенција на појавување на настанот A ќе отстапи од веројатноста за појавување на A најмногу за 0.01;

б) Да се оцени максималното отстапување на релативната фрекфенција на појавување на настанот A од веројатноста за појавување на A што со веројатност од барем 99% може да го очекуваме при $n = 12000$ повторувања на експеримантот.

Во обата случаи да се користи неравенствотот на Чебишев.

Решение. Нека X е случајната променлива која го означува бројот на појавувања на настанот A при n повторувања на експериментот. Тогаш X има биномна распределба со математичко очекување $MX = np$ и дисперзија $DX = np(1-p)$. Понатаму, релативната фрекфенција на појавување на настанот A е количникот $\frac{X}{n}$, па затоа отстапувањето на релативната фрекфенција на појавување на настанот A од веројатноста за појавување на A се пресметува со изразот $\left|\frac{X}{n} - p\right|$.

а) Од претходната анализа следува дека во овој дел од задачата се бара следната веројатнст

$$\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{X}{15000} - 0.3\right| < 0.01\right) = P\left(\left|\frac{X-4500}{15000}\right| < 0.01\right) = \\
&= P\left(|X - 4500| < 150\right) = 1 - P\left(|X - 4500| \geq 150\right) = \\
&= 1 - P(|X - MX| \geq \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{3150}{150^2} = 0.86.
\end{aligned}$$

Значи, веројатноста дека при 15000 повторувања на експеримантот релативната фрекфенција на појавување на настанот A ќе отстапи од 0.3 најмногу за 0.01 е поголема или еднаква на 0.86.

б) Слично како во претходниот дел имаме

$$\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{X}{12000} - 0.3\right| < \delta\right) = P\left(\left|\frac{X-3600}{12000}\right| < \delta\right) = \\
&= P\left(|X - 3600| < 12000\delta\right) = 1 - P\left(|X - 3600| \geq 12000\delta\right) = \\
&= 1 - P(|X - MX| \geq \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{2520}{(12000\delta)^2}.
\end{aligned}$$

Последниот израз треба да биде поголем или еднаков на 99%, па решавајќи ја неравенката $1 - \frac{2520}{(12000\delta)^2} \geq 0.99$ добиваме $\delta \geq 0.0418$.

Значи, со сигурност од најмалку 99% може да тврдиме дека при 12000 повторувања на експеримантот, максималното отстапување на релативната фрекфенција на појавување на настанот A од вредноста 0.3, ќе изнесува 0.0418.

3.2.3. При производството на еден машински дел кај него може да се појави грешка A, со веројатност 0.02, и грешка B, со веројатност 0.05. Со помош на неравенството на Чебишев да се определи во кои граници ќе се наоѓа бројот на делови со грешка во серија од 3000 произведени делови, со сигурност од 0.98?

Решение. Веројатноста дека случајно избран машински дел ќе биде со грешка (од вид A или B) изнесува $p = 1 - (1-0.02)\cdot(1-0.05) = 0.069$. Сега, нека X е случајната променлива која го означува бројот на делови кои имаат грешка во серијата од $n = 3000$ произведени делови. Тогаш X има биномна распределба со математичко очекување $MX = np = 207$ и дисперзија $DX = np(1-p) = 192.717$. Понатаму,

$$P(|X - 207| < \epsilon) = 1 - P(|X - 207| \geq \epsilon) =$$
$$= 1 - P(|X - MX| \geq \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{192.717}{\epsilon^2}.$$

Последниот израз треба да биде поголем или еднаков на 0.98, па решавајќи ја неравенката $1 - \frac{192.717}{\epsilon^2} \geq 0.98$ добиваме $\epsilon \geq 98.162$.

Значи, со сигурност од 98% може да тврдиме дека во серија од 3000 произведени делови за бројот на делови со грешка ќе важи $|X - 207| < 98.162$, односно тој ќе биде поголем од $207 - 99 = 108$ и помал од $207 + 99 = 306$.

3.2.4. Имаме две монети, една хомогена и друга кај која писмо се појавува со веројатност $3/4$. На случаен начин се избира една од монетите и се фрла n пати. Нека S_n е бројот на писма што се појавиле при тоа. Дали количникот S_n/n може да се искористи за да се заклучи која од монетите е избрана? Одговорот образложи го.

Решение. Нека X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, е случајна променлива која добива вредност 1 ако при i-тото фрлање на монетата се појавило писмо и 0 ако се појавила глава. Значи

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

ако е избрана првата, односно втората монета. Понатаму, случајните променливи X_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$, се независни, со математичко очекување $MX_i = p_1 = 1/2$ ако е избрана првата монета, односно $MX_i = p_2 = 3/4$ ако е избрана втората монета. Дисперзијата во првиот случај е $DX_i = 1/4$, а во вториот $DX_i = 3/16$, за секое $i = 1, 2, \ldots, 100$. Значи за низата случајни променливи X_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$, важи законот на големите броеви, односно

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| \geq \epsilon\right) = 0, \quad \text{за секое} \quad \epsilon > 0.$$

Од овде следува дека за доволно големо n, релативната фрекфенција на појавување на писма $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ е произволно блиску до MX_i, и затоа одлуката дали е избрана првата (хомогената) или втората (нехомогена) монета може да се донесе на следниот начин: ако релативната фрекфенција на појавување на писма, S_n/n, е поблиску до $1/2$ тогаш се работи за првата монета, а ако е поблиску до $3/4$, за втората. Поинаку кажано, ако $\frac{S_n}{n} < \frac{1/2+3/4}{2} = \frac{5}{8}$ тогаш избрана е првата монета, а во спротивно втората.

3.2.5. Нека случајната променлива X има
а) рамномерна распределба на сегментот $[0, 10]$;
б) експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 0.2$;
в) нормална распределба со параметри $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Да се определи математичкото очекување и дисперзија на случајната променлива X, а потоа да се пресметаат точните вредности на веројатностите $P(|X - MX| \geq 1)$, $P(|X - MX| \geq 3)$, $P(|X - MX| \geq 4)$ и $P(|X - MX| \geq 10)$. Добиените веројатности да се споредат со соодветните оценки што се добиваат со помош на неравенството на Чебишев.

Решение.
а) Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/10, & x \in (0, 10) \\ 0, & x \notin (0, 10) \end{cases}$$

и согласно делот (д) од задача 3.1.1, $MX = 5$ и $DX = 25/3$. Понатаму,

$$\begin{aligned} P(|X - MX| \geq a) &= 1 - P(|X - MX| < a) = \\ &= 1 - P(-a < X - MX < a) = \\ &= 1 - P(MX - a < X < MX + a). \end{aligned}$$

За $0 < a \leq MX = 5$,

$$P(|X - MX| \geq a) = 1 - \int_{MX-a}^{MX+a} p_X(x)dx = 1 - \frac{a}{5}$$

и од овде

$$P(|X - MX| \geq 1) = 4/5, \quad P(|X - MX| \geq 3) = 2/5,$$
$$P(|X - MX| \geq 4) = 1/4.$$

Но, за $a = 10$,

$$P(|X - MX| \geq 10) = 1 - P(-5 < X < 15) = 1 - 1 = 0.$$

Сега, со помош на неравенството на Чебишев се добива

$$P(|X - MX| \geq a) \leq \frac{DX}{a^2} = \frac{25}{3a^2},$$

односно

$$P(|X - MX| \geq 1) \leq 25/3, \quad P(|X - MX| \geq 3) \leq 25/27,$$
$$P(|X - MX| \geq 4) \leq 25/48, \quad P(|X - MX| \geq 10) \leq 1/12.$$

б) Слично како во делот (а), поаѓајќи од густината на случајната промен-лива X,

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

се добива $MX = 1/\lambda = 5$, $DX = 1/\lambda^2 = 25$,

$$P(|X - MX| \geq a) = 1 - \int_{MX-a}^{MX+a} p_X(x)dx = 1 + \frac{1}{e}\left(e^{-0.2a} - e^{0.2a}\right),$$

за $0 < a \leq MX = 5$, и

$$P(|X - MX| \geq a) = 1 - \int_{0}^{MX+a} p_X(x)dx = e^{-1-0.2a},$$

за $a > MX = 5$. Од овде,

$$P(|X - MX| \geq 1) = 0.852, \quad P(|X - MX| \geq 3) = 0.532,$$
$$P(|X - MX| \geq 4) = 0.347, \quad P(|X - MX| \geq 10) = 0.05.$$

Со помош на неравенствотот на Чебишев

$$P(|X - MX| \geq 1) \leq 25, \quad P(|X - MX| \geq 3) \leq 25/9,$$
$$P(|X - MX| \geq 4) \leq 25/16, \quad P(|X - MX| \geq 10) \leq 1/4.$$

в) Заради $MX = \mu = 0$, за $a \geq 0$ имаме

$$P(|X - MX| \geq a) = P(|X| \geq a) = 2P(X \leq -a).$$

Понатаму, Со оглед на тоа дека X е стандрадизирана случајна промен-лива, директно отчитувајќи од табела ??? се добива

$$P(|X - MX| \geq 1) = 0.3174, \quad P(|X - MX| \geq 3) = 0.0026,$$
$$P(|X - MX| \geq 4) = 0.00006334, \quad P(|X - MX| \geq 10) \approx 0.$$

Со помош на неравенствотот на Чебишев

$$P(|X - MX| \geq 1) \leq 1, \quad P(|X - MX| \geq 3) \leq 1/9,$$
$$P(|X - MX| \geq 4) \leq 1/16, \quad P(|X - MX| \geq 10) \leq 1/100.$$

Може да се заклучи дека во сите три случаи неравенството на Чебишев дава точна оценка за веројатноста, а оценката во делот (в) е најдобра, т.е., е најблиску до точната вредност.

Дополнителни задачи

3.2.6. Случајната променлива X има математичко очекување 5 и стандардна девијација 0.1. Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста дека случајната променлива X ќе прими вредност поголема од 4.8 и помала од 5.2.

3.2.7. Хомогена коцка се фрла 420 пати.

а) Да се оцени веројатноста дека бројот на појавувања на единица ќе отстапува од 70 за повеќе од 20.

б) Да се определи веројатноста дека фрекфенцијата на појавување на единица ќе се разликува од 1/6 за не повеќе од 0.01.

3.2.8. Дисперзијата на секоја од 2500 независни случајни променливи не е поголема од 5. Да се оцени веројатноста дека отстапувањето на аритметичката средина на тие случаји променливи од аритметичката средина на нивните математички очекувања не е поголема од 0.4.

3.2.9. При n фрлања на хомогена коцка единица се појавила S_n пати. Да се оцени веројатноста

$$P\left(\left|\frac{S_{100}}{100} - 3.5\right| \geq 0.05\right).$$

3.2.10. При n фрлања на монета писмо се појавило S_n пати. Да се определи n така што

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.01\right) \leq 0.01.$$

3.2.11. Дадена е низата случајни променливи X_i, $i = 1, 2, \ldots$, со ист закон на распределба на веројатностите

$$X_i = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

а) Да се определи законот на распределбана веројатностите на случајната променлива $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$.

б) Да се определи веројатноста дека аритметичката средина на првите сто случајни променливи ќе има вредност нула.

в) Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста дека апсолутната вредност од аритметичката средина на првите сто случајни променливи ќе биде помала или еднаква на еден.

3.2.12. Веројатноста за изработка на неисправен призвод изнесува 0.04.

а) Да се определи веројатноста дека помеѓу 1500 производи ќе има помеѓу 60 и 75 неисправни.

б) Колку производи треба да се изработат за веројатноста дека помеѓу нив ќе има барем 100 исправни изнесува 0.95.

3.2.13. Извршени се $n = 1000$ мерења на една величина. Ако средното квадратно отстапување на резултатите од мерењата не е поголемо од 1, да се оцени веројатноста дека аритметичката средина на резултатите добиени од мерењата ќе отстапува од вистинската вредност на величината не повеќе од 0.4.

3.2.14. Веројатноста за појавување на настан A при еден експеримент е 0.1. Да се оцени веројатноста дека при 2000 повторувања на експериментот настанот A ќе се појави помеѓу 180 и 220 пати.

3.2.15. Да се оцени веројатноста дека отстапувањето на една случајна променлива од нејзиното математичко очекување, по апсолутна вредност, нема да биде поголемо од $k \in \mathbb{N}$ стандардни девијации на таа случајна променлива.

3.2.16. Еден дистрибутер на пијалоци вози на релација момеѓу градовите A и B кои се на растојание од 100 km. На половина пат помеѓу A и B дистрибутерот има сервисен центар за поправка на камионите. Нека X е случајна променлива со математичко очекување 50 и стандардна девијација 30 која го означува растојанието од местото A до местото на кое се расипал еден од камионите. Да се оцени веројатноста дека камионот е оддалечен од сервисниот центар не повеќе од 10 km.

3.2.17. Нека Y_n е случајната променлива што ја означува вредноста на акциите на една фирма во n-тиот ден од годината. Познато е дека промените на цената на акциите меѓу два последователни денови, $X_n = Y_{n+1} - Y_n$, се взаемно независни случајни променливи со математичко очекување 0 и стандардна девијација $1/4$. Ако $Y_1 = 100$, да се оценат веројатностите а) $P(25 \leq Y_2 \leq 35)$,

б) $P(25 \leq Y_{11} \leq 35)$,

в) $P(25 \leq Y_{101} \leq 35)$.

3.3 ЦЕНТРАЛНИ ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

3.3.1. Задачата 3.2.2 да се реши со помош на теоремата на Муавр-Лаплас и резултатите да се споредат со оние добиени со помош на неравенството на Чебишев.

Решение. Во решението на делот (а) од задача 3.2.2 дефинирана е случајна променлива X со биномна распределба и параметри $n = 15000$ и $p = 0.3$. Треба да се пресмета следната веројатност

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \delta = 0.01\right) = P\left(\left|\frac{X - np}{n}\right| < \delta\right) =$$
$$= P\left(\left|\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < \delta \cdot \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) =$$
$$= P\left(\left|\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < 2.67\right) = P(-2.67 < Z < 2.67),$$

каде $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, за големо n, согласно теоремата на Муавр-Лаплас може да се апроксимира со стандардизирана случајна променлива со нормална распределба. Затоа, со помош на табелата ??? се добива

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0.01\right) = P(-2.67 < Z < 2.67) =$$
$$= 1 - 2 \cdot P(Z \leq -2.67) = 1 - 2 \cdot 0.0038 = 0.9924.$$

Со помош на неравенството на Чебишев, во делот (а) од задача 3.3.1, за оваа веројатност добивме дека е поголема или еднаква на 0.86.

Во решението на делот (б) од задача 3.3.1 повторно се разгледува случајна променлива X со биномна распределба, параметри $n = 12000$, $p = 0.3$ и треба да се определи најмалата вредност на δ така што

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \delta\right) \geq 0.99.$$

Вршејќи слични трансформации како погоре се добива дека горното неравенство е еквивалентно со

$$P\left(|Z| < \delta \cdot \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geq 0.99,$$

каде стандардизираната случајна променлива $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, согласно теоремата на Муавр-Лаплас, за големо n може да се апроксимира со нормална распределба и затоа (види табела ???)

$$\delta \cdot \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \geq 2.33,$$

односно $\delta \geq 0.0097$. Оваа оценка е поточна од онаа добиена со неравенството на Чебишев, $\delta \geq 0.0418$.

3.3.2. Имаме две монети, една хомогена и друга кај која писмо се појавува со веројатност $3/4$. На случаен начин се избира една од монетите и се фрла n пати. Нека S_n е бројот на писма што се појавиле при тоа. Колку пати треба да се фрли монетата за со сигурност од 95%, врз база на релативната фрекфенција на појавување на писмо, S_n/n (види задача 3.2.4), да може да се тврди која од двете монети е избрана на почетокот?

Решение. Во решението на задача 3.2.4 заклучивме дека одлуката дали е избрана првата (хомогената) или втората (нехомогена) монета може да се донесе на следниот начин: ако $\frac{S_n}{n} < \frac{1/2+3/4}{2} = \frac{5}{8}$ тогаш избрана е првата монета, а во спротивно втората. Значи се бара најмалото n така што $P\left(\frac{S_n}{n} < \frac{5}{8}\right) \geq 0.95$. Но,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{n} < \frac{5}{8}\right) &= P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{8}\right) = P\left(\frac{S_n - np_1}{n} < \frac{1}{8}\right) = \\ &= P\left(\frac{S_n - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} < \frac{1}{8}\sqrt{\frac{n}{p_1(1-p_1)}}\right) \end{aligned}$$

и согласно теоремата на Муавр-Лаплас, апроксимирајќи со стандардизирана нормална распределба се добива

$$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{n}{p_1(1-p_1)}} \geq 1.645.$$

Овде е користена табела ???. Со решавање на горната неравенка имаме $n \geq 43.2964$, односно монетата треба да се фрли најмалку 44 пати за врз база на релативната фрекфенција на појавување на писма да може да се тврди за која монета е избрана.

3.3.3. Во еден студентскли дом може да се сместат 1000 студенти. Веројатноста дека студент кој добил сместување во домот ќе се предомисли и нема да ја користи собата изнесува 0.1. Управата на домот одговорила потврдно на 1150 барања за сместување. Да се определи веројатноста дека капацитетот на студентскиот дом ќе биде помал од бројот на студенти кои добиле право на сместување и решиле да го искористат тоа право.

Решение. Нека X е случајна променлива која го означува бројот на студенти кои добиле право на сместување и решиле да го искористат тоа право. Таа има бинома распределба со параметри $n = 1150$ и $p = 1 - 0.1 = 0.9$. Треба да се определи веројатноста $P(X > 1000)$. Лесно се проверува дека

$$P(X > 1000) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{1000 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(Z > -3.44),$$

каде $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ е стандардизирана случајна променлива и согласно теоремата на Муавр-Лаплас за големо n може да се апроксимира со нормална распределба. Затоа со помош на табела ??? се добива

$$P(X > 1000) = P(Z > -3.44) = 1 - P(Z \leq -3.44) \approx 1 - 0.0003 = 0.997.$$

Значи, веројатноста дека капацитетот на студентскиот дом ќе биде помал од бројот на студенти кои добиле право на сместување и решиле да го искористат тоа право е приближно 99.7%.

3.3.4. Едно јаже е сплетено од 500 снопови. Силата на кинење за секој сноп изнесува 10 N со стандардна девијација 1 N. Нека претпоставиме дека силата на кинење на јажето е збир од силите на кинење на сноповите и дека големината на силата на кинење на секој сноп не влијае на големината на силата на кинење на останатите снопови. Да се определи веројатноста дека силата на кинење на јажето ќе биде поголема од 4950 N.

Решение. На почетокот да ги нумерираме сноповите со броеви од 1 до 500. Понатаму, нека X_i, $i = 1, 2, \ldots, 500$, е силата на кинењена i-тиот сноп. Тогаш, X_i, $i = 1, 2, \ldots, 500$, е низа од независни случајни променливи со иста распределба, со математицко очекување $\mu = MX_i = 10$ и стандардна девијација $\sigma = 1$. Треба да се определи веројатноста $P\left(\sum_{i=1}^{500} X_i > 4950\right)$. Очигледно

$$P\left(\sum_{i=1}^{500} X_i > 4950\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{4950 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - P(Z \leq -2.24),$$

каде $Z = \frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ согласно централната гранична теорема за големо n може да се апроксимира со стандардизирана случајна променлива со нормална распределба. Затоа според табела ???

$$P\left(\sum_{i=1}^{500} X_i > 4950\right) \approx 1 - 0.0125 = 0.9875.$$

Значи, веројатноста дека силата на кинење на јажето ќе биде поголема од 4950 N е приближно 98.75%.

3.3.5. Една вага за телесна тежина прави грешка од -0.2, -0.1, 0, 0.1 и 0.2 kg со подеднаква веројатност. Да се определи веројатноста дека при $n = 16$ последователни мерења на маса од 80 kg ќе се добијат вредности чија аритметичка средина ќе биде поголема од 79.9 kg и помала од 80.1 kg.

Решение. Нека X_i, $i = 1, 2, \ldots, 16$, е гршката што се прави при i-тото мерење. Тогаш X_i, $i = 1, 2, \ldots, 16$, е низа од независни случајни променливи со ист закон на рамномерна распределба

$$X_i = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

за кои лесно се проверува дека $\mu = MX_i = 0$ и $\sigma^2 = DX_i = 0.02$. Во задачата се бара да се определи

$$P\left(79.9 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(80 + X_i) < 80.1\right) = P\left(79.9 < 80 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < 80.1\right)$$

што лесно се трансформира до

$$P\left(\frac{-0.1n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{0.1n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = P(-2.83 < Z < 2.83),$$

каде $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ согласно централната гранична теорема, за големо n, може да се апроксимира со стандардизирана случајна променлива со нормална распределба. Затоа според табела ???

$$P\left(79.9 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(80 + X_i) < 80.1\right) = P(Z < 2.83) - P(Z \leq -2.83) \approx$$
$$\approx 0.9977 - 0.0023 = 0.9954.$$

Значи, веројатноста дека при 16 последователни мерења на маса од 80 kg ќе се добијат вредности чија аритметичка средина ќе биде поголема од 79.9 kg и помала од 80.1 kg.е приближно 99.54%.

3.3.6. На располагање имаме инструмент за мерење должина таков што грешката што се прави при негова употреба е со нормална распределба и кој при мерење должина од 100 mm има стандардна девијација од 0.02 mm.

а) Ако мериме должина од 100 mm колку мерења треба да се направат за со сигурност од најмалку 95% да може да тврдиме дека аритметичката средина од мерењата отстапува од потребната за не повеќе од 0.01 mm?

б) Ако извршиме 36 мерења на непозната должина колкава е веројатноста дека аритметичката средина од мерењата отстапува од вистинската должима помалку од 0.01 mm?

Решение.

а) Нека се извршени n мерења и нека X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, е грешката што се прави при i-тото мерење. Тогаш, X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, е низа од независни случајни променливи со нормална распределба со параметри $\mu = 0$ и $\sigma = 0.02$. Се бара најмала вредност на n така што

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(100 + X_i) - 100\right| < 0.01\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 0.01\right) \geq 0.95.$$

Со едноставни трансформации се добива

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 0.01\right) =$$
$$= P\left(\frac{-0.01n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{0.01n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$
$$= P\left(-0.5\sqrt{n} < Z < 0.5\sqrt{n}\right),$$

каде $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Согласно централната гранична теорема, за големо n, случајната променлива Z може да се апроксимира со стандардизирана случајна променлива со нормална распределба. Затоа

$$P\left(-0.5\sqrt{n} < Z < 0.5\sqrt{n}\right) \approx 1 - 2 \cdot P\left(Z < -0.5\sqrt{n}\right),$$

па бараната вредност за n е таа што ја задоволува неравенката

$$1 - 2 \cdot P\left(Z < -0.5\sqrt{n}\right) \geq 0.95,$$

односно

$$P\left(Z < -0.5\sqrt{n}\right) \leq 0.025.$$

Конечно, од табела ??? следува $-0.5\sqrt{n} \leq -1.96$ односно $n \geq 15.3664$. Значи треба да се извршат најмалку 16 мерења.

б) Нека се извршени $n = 36$ мерења на должина d mm. Тогаш, слично како во претходниот дел се бара веројатноста

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d + X_i) - d\right| < 0.01\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 0.01\right) \approx$$
$$\approx 1 - 2 \cdot P\left(Z < -0.5\sqrt{n}\right) = 1 - 2 \cdot P(Z < -2) = 1 - 2 \cdot 0.0228 = 0.9544.$$

Значи, веројатноста дека при 36 мерења на непозната должина аритметичката средина од мерењата ќе отстапува од вистинската должина за помалку од 0.01 mm изнесува 95.44%.

Дополнителни задачи

3.3.7. Дијаметарот на една серија од 5000 вратила е случајна променлива со математичко очекување 10mm и дисперзија 0.02. Да се определи веројатноста дека аритметичката средина од дијаметрите на серијата вратила ќе се наоѓа во интевалот $(9.95, 10.015)$.

3.3.8. Хомогена монета се фрла 100 пати. Да се опрдели веројатноста

а) дека писмо ќе се појави точно 55 пати;

б) дека писмо ќе се појави помалку од 40 пати;

в) дека писмо ќе се појави повеќе од 60 пати;

г) дека писмо ќе се појави помеѓу 40 и 60 пати;

д) дека фрекфенцијата на појавувања на писмо ќе биде помала од 0.45.

3.3.9. Задачата 3.2.3 да се реши со помош на теоремата на Муавр-Лаплас и резултатот да се спореди со оној добиен со помош на неравенството на Чебишев.

3.3.10. Веројатноста за изработка на неисправен призвод изнесува 0.04.

а) Да се определи веројатноста дека помеѓу 1500 производи ќе има помеѓу 60 и 75 неисправни.

б) Колку производи треба да се изработат за веројатноста дека помеѓу нив ќе има барем 100 исправни изнесува 0.95.

3.3.11. Случајната променлива Y_n е аритметичка средина од n независни случајни променливи со ист закон на распределба и со дисперзија 3. Колку треба да изнесува n за со веројатност не помала од 0.??? да може да тврдиме дека случајната променлива Y отстапува од своето математичко очекување не повеќе од 0.??.

3.3.12. Веројатноста за оштетување на еден производ при транспорт е 0.02.

а) Колку производи треба да се порачаат за веројатноста дека по транспортот ќе се добијат барем 200 неоштетени производи биде поголема од 0.99?

б) Да се пресмета веројатноста дека при транспорт на 500 производи ќе се оштетат помалку од 30.

3.3.13. Еден тест се состои од 50 прашања и за негово положување потребно е точно да се одговори на најмалку 30 од нив. Веројатноста дека еден студент точно ќе одговори на прашање од тестот изнесува 3/4. Да се определи веројатноста дека студентот ќе го положи тестот.

3.3.14. Да се оцени веројатноста дека при 1000000 фрлања на монета писмо ќе се појави помеѓу 499000 и 501000 пати. За тоа да се користи

а) неравенството на Чебишев;

б) централната гранична теорма.

3.3.15. Од железничката станица во градот A кон градот B во исто време поаѓаат два воза. Просечно 1500 патници се качуваат на возовите случајно избирајќи еден од нив. Колку седишта треба да има секој од возовите за веројатноста дека ќе има седиште за секој од патниците е поголема или еднаква на 0.99.

3.3.16. Векот на траење на една серија производи се зема дека е еднаков на аритметичката средина од векот натраење на дел од производите од серијата чија вредност практично се испитува. Колку производи треба да се испитаат за со веројатност не помала од 0.??? да може да тврдиме дека средниот век на траење на производите од целата серија отстапува од средниот век на траење на испитаните производи не повеќе од 5 часови, ако средното квадратно отстапување на векот на траење на производите е 50 часови?

3.3.17. Една хомогена коцка се фрла 1000 пати. Да се оцени веројатноста дека збирот на броевите кои ќе се појават при фрлањата е

а) поголем од 3500;

б) еднаков а 3500;

в) поголем од 3300 и помал од 3600.

3.3.18. Хомогена коцка се фрла се додека не се добие збир поголем или еднаков на 1001. Да се оцени веројатноста дека за тоа ќе бидат потребни

а) повеќе од 290 фрлања;

б) помалку од 280 фрлања;

в) повеќе од 275 и помалку од 295 фрлања.

3.3.19. Во една фабрика се произведуваат чоколади од 100 mm. При тоа, 30% од чоколадите тежат 97 mm, 60% од чоколадите тежат 100 mm и 10% тежат 103 mm.

а) Да се определи математичкото очекување и дисперзијата на тежината на случајно избрано чоколадо;

б) Да се оцени веројатноста дека во пакување од 200 чоколади, производителот ќе губи повеќе од 50 mm.

в) Да се оцени веројатноста дека во пакување од 200 чоколади, производителот ќе губи точно 50 mm.

г) Да се оцени веројатноста дека во пакување од 200 чоколади, производителот ќе има загуба.

3.3.20. Нека Y_n е случајната променлива што ја означува вредноста на акциите на една фирма во n-тиот ден од годината. Познато е дека промените на цената на акциите меѓу два последователни денови, $X_n = Y_{n+1} - Y_n$, се взаемно независни случајни променливи со математичко очекување 0 и стандардна девијација $1/4$. Ако $Y_1 = 100$, да се оценат веројатностите

а) $P(Y_{365} \geq 100)$,

б) $P(Y_{365} \geq 110)$,

в) $P(Y_{365} \geq 120)$.

3.3.21. Познато е дека честички затворени во долга цефка постојано се движат напред - назад. Брзината на движење на честичките е случајна променлива со математичко очекување 0 cm/s и стандардна девијација 1 cm/s.Нека во цефката има 10^{20} честички.

а) Да се определи математичкото очекување и дисперзијата на аритметичката средина од брзините на сите честички.

б) Да се оцени веројатноста дека аритметичката средина од брзините на сите честички ќе биде поголема или еднаква на 10^{-9} cm/s.

II

СТАТИСТИКА

Глава 4

СТАТИСТИЧКИ ОЦЕНКИ

4.1 ТОЧКАСТИ ОЦЕНКИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

4.1.1. Нека генералното множество X има распределба

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 5 \\ \theta/6 & \theta/4 & \theta/3 & 1-3\theta/4 \end{pmatrix}.$$

Врз основа на случајниот примерок

вредност	-2	-1	0	5
број на појавувања	1	2	3	2

да се изврши оценка на параметарот θ со помош на

а) методот на моменти;

б) методот на максимална веројатност.

Решение.

а) Оценка на параметарот θ со помош на методот на моменти се врши со решавање на равенката $MX = \overline{x}$. Од законот на распределба на веројатностите на X се добива

$$MX = (-2)\cdot\frac{\theta}{6} + (-1)\cdot\frac{\theta}{4} + 0\cdot\frac{\theta}{3} + 5\cdot\left(1-\frac{3\theta}{4}\right) = 5 - \frac{13}{3}\theta,$$

а од случајниот примерок со обем $n = 3 + 2 + 1 + 2 = 8$, следува

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8} \cdot \left[1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5\right] = \frac{3}{4}.$$

Затоа, равенката $MX = \overline{x}$ се сведува на

$$5 - \frac{13}{3}\widehat{\theta} = \frac{3}{4},$$

и со нејзино решавање се добива дека оценката на параметарот θ со помош на методот на моменти е $\widehat{\theta} = \frac{51}{52} \approx 0.98$.

б) Определување оценка на параметарот θ со помош на методот на максимална веројатност се врши со наоѓање вредност на θ за која функцијата на веројатноста L постигнува максимум, т.е., со решавање на равенката $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$. Функцијата на веројатноста се определува на следниот начин

$$\begin{aligned} L &= (P(X=-2))^1 \cdot (P(X=-1))^2 \cdot (P(X=0))^3 \cdot (P(X=5))^2 \\ &= \left(\frac{\theta}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{\theta}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{3}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{3\theta}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Понатаму,

$$\ln L = 6 \ln \theta - \ln 6 - 2 \ln 4 - 3 \ln 3 + 2\left(\ln(4 - 3\theta)\right) - 2 \ln 4,$$

па равенката $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ е еквивалентна со

$$\frac{6}{\theta} - \frac{6}{4 - \theta} = 0.$$

и за параметарот θ се добива оценката $\widehat{\theta} = 1$.

4.1.2. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има експоненцијална распределба, т.е., има густина

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Да се изврши оценка на параметарот θ со помош на

а) методот на моменти;

б) методот на максимална веројатност.

Да се провери дали добиените оценки се центрирани.

Решение.

а) Слично како во делот (а) од претходната задача, треба да се реши равенката $MX = \overline{x}$. За математичкото очекување на X се добива

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} dx = -\theta e^{-x/\theta}(1+x)\Big|_0^{+\infty} = \theta,$$

па затоа оценката на параметарот θ со помош на методот на момент

$$\widehat{\theta} = \overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

б) Согласно методот на максимална веројатност треба да се најде за кое θ функцијата на веројатноста L постигнува максимум, односно треба да се реши равенката $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$. За функцијата на веројатноста L се добива

$$L = p_X(x_1) \cdot p_X(x_2) \cdot \cdots \cdot p_X(x_n) = \frac{1}{\theta} e^{-x_1/\theta} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x_2/\theta} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x_n/\theta} =$$
$$= \frac{1}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} \cdot e^{-n\overline{x}/\theta}.$$

Затоа, $\ln L = -n \ln \theta - n\overline{x}/\theta$, па равенката $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ се сведува на

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{n\overline{x}}{\theta^2} = 0$$

и оценката на параметарот θ со помош на методот на максимална веројатност е $\widehat{\theta} = \overline{x}$.

Може да се заклучи дека со обата методи се доби оста оценка, $\widehat{\theta} = \overline{x}$.

4.1.3. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има густина

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}\, e^{-\frac{2}{\theta}\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Да се изврши оценка на параметарот θ со помош на методот на максимална веројатност. Потоа да се провери дали добиената оценка е центрирана, конзистентна и ефикасна. При тоа да се искористи дека за $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

Решение.

Оценка на θ: Функцијата на веројатноста е

$$L = p_X(x_1) \cdot p_X(x_2) \cdot \cdots \cdot p_X(x_n) = \frac{2}{\theta^2}\, e^{-\frac{2}{\theta}\sqrt{x_1}} \cdot \frac{2}{\theta^2}\, e^{-\frac{2}{\theta}\sqrt{x_2}} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{\theta^2}\, e^{-\frac{2}{\theta}\sqrt{x_n}} =$$
$$= \frac{2^n}{\theta^{2n}} \cdot e^{-\frac{2}{\theta}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)} = \frac{2^n}{\theta^{2n}} \cdot e^{-\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}},$$

па затоа

$$\ln L = n\ln 2 - 2n\ln\theta - \frac{2}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

Бараната оценка се добива од условот функцијата L да постигне максимална вредност, т.е.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} \equiv -\frac{2n}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = 0,$$

од каде $\widehat{\theta} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

Проверка на центрираноста: Треба да се провери дали $M\widehat{\theta} = \theta$. За таа цел

$$M\widehat{\theta} = M\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right) = \frac{1}{n}\cdot M\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}M\left(\sqrt{x_i}\right) = M\left(\sqrt{X}\right).$$

Понатаму, нека $Y = \sqrt{X}$ и $f(x) = \sqrt{x}$, па за пресметка на густината на распределба на Y, слично како во решението на задача 2.4.7, за $x > 0$ се добива

$$p_Y(x) = \left|(f^{-1}(x))'\right|\cdot p_X\left(f^{-1}(x)\right) = |2x|\cdot\frac{2}{\theta^2}\,e^{-\frac{2}{\theta}\sqrt{x^2}} = \frac{4x}{\theta^2}\,e^{-2x/\theta}.$$

Затоа

$$M\widehat{\theta} = M\left(\sqrt{X}\right) = MY = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_Y(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{4x^2}{\theta^2}\,e^{-2x/\theta}dx =$$
$$= \left[t = \frac{2x}{\theta},\ dx = \frac{\theta}{2}dt\right] = \frac{\theta}{2}\cdot\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt = \theta.$$

Значи, оценката $\widehat{\theta}$ е центрирана.

Проверка на конзистентноста: Треба да се провери дали

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\widehat{\theta}-\theta\right|\geq\epsilon\right) = 0.$$

Користејќи го неравенството на Чебишев се добива

$$P\left(\left|\widehat{\theta}-\theta\right|\geq\epsilon\right) = P\left(\left|\widehat{\theta}-E\widehat{\theta}\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{D\widehat{\theta}}{\epsilon^2}.$$

Понатаму

$$D\widehat{\theta} = D\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot D\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D\left(\sqrt{x_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D\left(\sqrt{X}\right) = \frac{1}{n}\cdot D\left(\sqrt{X}\right) = \frac{1}{n}\cdot\left[M\left(\sqrt{X}^{\;2}\right) - M^2\left(\sqrt{X}\right)\right]$$

и

$$M\left(\sqrt{X}^{\;2}\right) = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta^2}\,e^{-2\sqrt{x}/\theta}dx =$$

$$= \left[t = \frac{2\sqrt{x}}{\theta},\ dx = \frac{t\theta^2}{2}dt\right] = \frac{\theta^2}{4}\cdot\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt = \frac{3\theta^2}{2}.$$

Затоа,

$$D\widehat{\theta} = \frac{1}{n}\left(\frac{3\theta^2}{2} - \theta^2\right) = \frac{\theta^2}{2n}$$

и враќајќи се во неравенството на Чебишев

$$P\left(\left|\widehat{\theta} - \theta\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{D\widehat{\theta}}{\epsilon^2} = \frac{\theta^2}{2n\epsilon^2}.$$

Последниот израз конвергира кон нула кога n конвергира кон бескрајност. Од тоа следува дека оценката $\widehat{\theta}$ е конзистентна.

Проверка на ефикасноста: Треба да се пресмета ефикасноста на оценката

$$e\left(\widehat{\theta}\right) = \left(D\widehat{\theta}\cdot n\cdot M\left(\frac{\partial \ln p_X(X)}{\partial\theta}\right)^2\right)^{-1}.$$

За таа цел,

$$\ln p_X(X) = \ln 2 - 2\ln\theta + \frac{2}{\theta}\sqrt{X}, \qquad \frac{\partial \ln p_X(X)}{\partial\theta} = -\frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\sqrt{X}$$

и

$$M\left(\frac{\partial \ln p_X(X)}{\partial\theta}\right)^2 = M\left(-\frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\sqrt{X}\right)^2 = M\left(\frac{4}{\theta^2} - \frac{8}{\theta^3}\sqrt{X} + \frac{4}{\theta^4}X\right) =$$

$$= \frac{4}{\theta^2} - \frac{8}{\theta^3}\cdot M\left(\sqrt{X}\right) + \frac{4}{\theta^4}\cdot MX = \frac{4}{\theta^2} - \frac{8}{\theta^3}\cdot\theta + \frac{4}{\theta^4}\cdot\frac{3\theta^2}{2} = \frac{2}{\theta^2}.$$

Конечно

$$e\left(\widehat{\theta}\right) = \left(\frac{\theta^2}{2n}\cdot n\cdot\frac{2}{\theta^2}\right)^{-1} = 1$$

и тоа значи дека оценката $\widehat{\theta}$ е најефикасна.

4.1.4. Користејќи го методот на моменти да се оцени веројатноста p на еден случаен настан A ако во серија од n независни експерименти настанот A настапил m пати. Да се провери дали добиената оценка е центрирана и ефикасна.

Решение. Ако настапувањето на настанот A при експериментот се означи со 1, а не-настапувањето со 0, тогаш ситуацијата опишана во задачата е еквивалентна со следната: случаен примерок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, извлечен е од генерално множество X со распределба

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

и при тоа $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$. Затоа, според методот на моменти $p = MX = \overline{x} = \frac{m}{n}$, т.е., се добива оценката $\widehat{p} = \frac{m}{n}$.

<u>*Проверка на центрираноста*</u>: Дали $M\widehat{p} = p$? За таа цел

$$M\widehat{p} = M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} M(x_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} MX = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p.$$

Значи, оценката $\widehat{p}$ е центрирана.

<u>*Проверка на ефикасноста*</u>: Од

$$p_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases},$$

следува

$$\frac{\partial \ln p_X(X)}{\partial \theta} = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = 1 \\ -\frac{1}{1-p}, & x = 0 \end{cases},$$

и понатаму

$$M\left(\frac{\partial \ln p_X(X)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{p^2} \cdot p + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot (1-p) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Слично

$$D\widehat{p} = D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} D(x_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} DX = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

На крајот, за ефикасноста на оценката $\widehat{p}$ се добива

$$e\left(\widehat{\theta}\right) = \left(D\widehat{\theta} \cdot n \cdot M\left(\frac{\partial \ln p_X(X)}{\partial \theta}\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{p(1-p)}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1} = 1,$$

т.е., оценката $\widehat{p}$ е најефикасна.

4.1.5. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество X со рамномерна распределба на сегментот $[a, b]$. Да се изврши оценка на параметрите a и b со помош на методот на максимална веројатност.

Решение. Густината на X е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Од овде за функцијата на веројатноста се добива

$$L = p_X(x_1) \cdot p_X(x_2) \cdot \cdots \cdot p_X(x_n) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n.$$

Понатаму, од $\ln L = -n \ln(b-a)$ следува $\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{b-a} > 0$, односно L е растечка функција по параметарот a. Согласно методот на максимална веројатност, функцијата L треба да постигне максимална вредност, па затоа, оценката на параметарот a е најголемиот реален број што го задоволува условот $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е.

$$\widehat{a} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

На сличен начин од $\frac{\partial \ln L}{\partial b} = -\frac{n}{b-a} < 0$ се добива

$$\widehat{b} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Дополнителни задачи

4.1.6. Нека генералното множество X има распределба

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 & 5 \\ \frac{\theta}{5} & \frac{\theta}{5} & \frac{\theta}{4} & \frac{\theta}{4} & 1 - \frac{\theta}{10} \end{pmatrix}.$$

Врз основа на случајниот примерок

вредност	-2	-1	0	2	5
број на појавувања	1	2	2	1	1

да се изврши оценка на параметарот θ со помош на

а) методот на моменти;

б) мродот на максимална веројатност.

4.1.7. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има Пуасонова распределба, т.е., $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$. Да се изврши оценка на параметарот λ со помош на

а) методот на моменти;

б) методот на максимална веројатност.

Да се провери дали добиените оценки се центрирани.

4.1.8. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има експоненцијална распределба, т.е., има густина

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Да се изврши оценка на параметарот θ со помош на

а) методот на моменти;

б) методот на максимална веројатност.

Да се провери дали добиените оценки се центрирани.

4.1.9. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има густина

а) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}e^{-\frac{2}{\theta}\sqrt{x}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \theta > 0;$

б) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}, \quad \theta \in (0, 1);$

в) $p_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|};$

г) $p_X(x) = \begin{cases} ax^{\theta-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$;

д) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\theta\pi}} e^{-\frac{2}{\theta}x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

Да се изврши оценка на параметарот θ со помош на методот на максимална веројатност. Потоа да се провери дали добиената оценка е центрирана, конзистентна и ефикасна.

4.1.10. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има рамномерна распределба на сегментот $[a, b]$. Да се изврши оценка на параметарот $d = b - a$ со помош на методот на максимална веројатност. Потоа да се провери дали добиената оценка е центрирана и конзистентна.

4.1.11. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е случаен примерок извлечен од генерално множество што има рамномерна распределба на сегментот $[0, \theta]$. За оценките

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n} \cdot \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{и} \quad \widehat{\theta} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

да се испита центрираноста и да се провери која од нив е поефикасна.

4.1.12. Реализирани се две серии од по n_1 и n_2 независни експерименти, соодветно. Во првата серија случајниот настан A настапил m_1 пати, а во втората серија m_2 пати. Со методот на максимална веројатност да се оцени веројатноста $p = P(A)$, за реализација на настанот A, сметајќи дека таа е иста за секој експеримент од двете серии.

4.2 ИНТЕРВАЛ НА ДОВЕРБА ЗА ФРЕКФЕНЦИЈАТА КАЈ СЕРИЈА НЕЗАВИСНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Основни елементи од теорија

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}},\ \widehat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}}\right) \tag{4.1}$$

Решени задачи

4.2.1. Во една анкета од 50 испитаници, 19 се изјасниле дека повеќе им се допаѓа инстант, отколку филтер кафе. Да се определи 95%-тен интервал на доверба за веројатноста на случајно избран човек повеќе да му се допаѓа инстант кафе. Колку луѓе треба да се анкетираат за 95%-тниот интервал на доверба да биде широк 0.1?

Решение. Од $n = 50$ испитаници, за инстант кафе се изјасниле $m = 19$, па согласно задача 4.1.4 се добива дека најдобрата центрирана оценка за веројатноста на случајно избран човек повеќе да му се допаѓа инстант кафе е $\widehat{p} = \frac{m}{n} = \frac{19}{50}$. Бидејќи $n\widehat{p} = 19 \geq 10$ и $n(1-\widehat{p}) = 31 \geq 10$ за определување на бараниот интервал може да се користи формулата (4.1).

Понатаму, за $1 - \alpha = 95\% = 0.95$, се добива $\alpha = 0.05$ и $1 - \alpha/2 = 0.975$. Во табела 1 веројатноста 0.975 одговара на z-вредноста 1.96 и затоа $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. Конечно, според формулата бараниот интервал на доверба е

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}},\ \widehat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{19}{50} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{19}{50} \cdot \frac{31}{50}}{50}},\ \frac{19}{50} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{19}{50} \cdot \frac{31}{50}}{50}}\right) = (0.245, 0.515).$$

Значи, со сигурност од 95% може да се тврди следното: веројатноста дека случајно избран човек ќе сака повеќе инстант, во однос на филтер кафе, се наоѓа во интервалот $(0.245, 0.515)$.

Добиениот интервал на доверба широк е $0.515 - 0.245 = 0.27$, а ако сакаме интервал широк $w = 0.1$ тогаш треба да се анкетираат

$$n = \left(\frac{2\, z_{\alpha/2}}{w}\right)^2 \widehat{p}\,(1-\widehat{p}) = \left(\frac{2 \cdot 1.96}{0.05}\right)^2 \cdot \frac{19}{50} \cdot \frac{31}{50} = 362.032 \approx 362,$$

луѓе. Веројатноста p ја апроксимираме со нејзината најдобра центрирана оценка $\widehat{p}$.

4.2.2. Во една серија од 400 независни експерименти, случајниот настан A настапил 280 пати. Да се определи 90%-тен интервал на доверба за фрекфенцијата на настапување на настанот A. Колку експерименти треба да се извршат за 90%-тниот интервал на доверба да биде широк 0.02?

Решение. Од $n = 400$ експерименти, настанот A настапил $m = 280$ пати, па затоа најдобрата центрирана оценка за фрекфенцијата на настапување на A е $\widehat{p} = m/n = 0.7$. Понатаму за $1 - \alpha = 90\% = 0.9$, се добива $\alpha = 0.1$, $1 - \alpha/2 = 0.95$ и во табела 1 за веројатноста 0.95 се отчитува z-вредност помеѓу 1.64 и 1.65, т.е., вредност 1.645. Затоа $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$. Бидејќи $n\widehat{p} = 280 \geq 10$ и $n(1-\widehat{p}) = 120 \geq 10$, може да се користи формулата (4.1) и да се добие

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}},\ \widehat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(0.7 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{400}},\ 0.7 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{400}}\right) = (0.662, 0.738).$$

За да се добие 90%-тен интервал на доверба со широчина $w = 0.02$ треба да се извршат

$$n = \left(\frac{2\, z_{\alpha/2}}{w}\right)^2 \widehat{p}\,(1-\widehat{p}) = \left(\frac{2 \cdot 1.645}{0.02}\right)^2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 5682.65 \approx 5683$$

експерименти. Во пресметката вредноста на фрекфенцијата, p, ја апроксимираме со нејзината најдобра центрирана оценка $\widehat{p}$.

4.2.3. Во еден сервис на автомобили испитувањата покажале дека 20% од луѓето кои ги сервивирале своите автомобили кај нив, не биле задоволни од услугата. После превземените мерки за подобрување на услугата потребно е да се спроведе нова анкета. Колку луѓе треба да се анкетираат за 99%-тниот интервал на доверба за процентот на луѓе кои не се задоволни од услугата да биде со ширина од 8%?

Решение. За $1-\alpha = 99\% = 0.99$, се добива $\alpha = 0.01$ и $1-\alpha/2 = 0.995$. Во табела 1 за веројатноста 0.995 се отчитува z-вредност помеѓу 2.57 и 2.58, т.е., вредност 2.575. Затоа $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$, па земајќи $p = 20\% = 0.2$ и $w = 8\% = 0.08$, според формулата

$$n = \left(\frac{2\, z_{\alpha/2}}{w}\right)^2 p\,(1-p) = \left(\frac{2 \cdot 2.575}{0.08}\right)^2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 663.06,$$

се заклучува дека за да се добие 99%-тен интервал на доверба со широчина $w = 8\%$ треба да се испитаат 663 луѓе.

Дополнителни задачи

4.2.4. Еден експеримент се повторува $n = 100$ пати и при тоа настанот A настапува

а) $m = 22$ пати;
б) $m = 18$ пати;
в) $m = 25$ пати;
г) $m = 16$ пати.

За секој од овие случаи да се определи 99%-тен интервал на доверба за веројатноста за настапување на настанот A. Колку експерименти треба да се направат за овој интервал да биде широк 0.1?

4.2.5. Од 40 студенти кои дипломирале на еден факултет, 30 се изјасниле дека се вработиле во првата година по дипломирањето. Да се определи 95%-тен интервал на доверба за веројатноста дека случајно избран дипломец од факултетот ќе се вработи во првата година по дипломирањето. Колку дипломирани треба да се анкетираат за овој интервал да биде широк 0.1?

4.2.6. Од првите 5000 бебиња родени во 2003 година, 2627 се машки. Да се определи, со сигурност од 99%, во кој интервал се наоѓа веројатноста за раѓање на машко бебе.

4.2.7. Во една фабрика во последната деценија 264 работници се здобиле со повреди на работното место, а 68 од нив по своја вина. Да се определи 90%-тен интервал на доверба за процентот на работници, од вкупниот број на повредени работници, кои повредите ги здобиле по своја вина.

4.2.8. Од 45 анкетирани, 8 се изјасниле како пушачи. Да се определи 95%-тен интервал на доверба за процентот на пушачи меѓу луѓето. Колку луѓе треба да се анкетираат за овој интервал да биде широк 5%?

4.2.9. Нов лек, за да се тестира, даден им е на 40 болни кои прифатиле да го земат. Кај 28 од нив ситуацијата се подобрила. Да се определи, со сигурност од 99%, во кој интервал се наоѓа веројатноста дека лекот ќе предизвика подобрување на состојбата кај случајно избран човек кој е болен од соодветната болест. Колку болни треба да го тестираат лекот за овој интервал да биде широк 0.02?

4.2.10. Издавач на дневен весник во едно авои испитување констатирал дека од 1000 купувачи на весникот, 623 биле мажи. Да се определи 90%-тен интервал на доверба за процентот на мажи меѓу купувачите на весникот.

4.2.11. Студентската организација на еден факултет анкетирала 50 студенти, и 47 од нив се согласиле дека бројот на сесии во текот на учебната година треба да се намали. Да се определи 95%-тен интервал на доверба за процентот на студенти кои сметаат дека бројот на сесии треба да се намали. Колку студенти треба да се анкетираат за овој интервал да биде широк 4%?

4.3 ИНТЕРВАЛ НА ДОВЕРБА ЗА МАТЕМАТИЧКОТО ОЧЕКУВАЊЕ

Основни елементи од теорија

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.2}$$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.3}$$

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.4}$$

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.5}$$

Решени задачи

4.3.1. Испитан е векот на траење на 100 сијалици и добиен е среден век на траење 3042 часови. Ако е познато дека векот на траење на една сијалица има стандардна девијација од 120 часови да се определи 95%-тен интервал на доверба за математичкото очекување на векот на траење на целата серија сијалици. Колку сијалици треба да се испитаат за овој интервал да биде широк 30 часови?

Решение. Потребно е да се определи интервал на доверба за математичкото очекување на векот на траење на сијалиците при позната стандардна девијација, $\sigma = 120$ часови, и голем примерок $n = 100 \geq 30$. За таа цел се користи формулата (4.2). Со испитување на 100-те сијалици добиен е среден век на траење $\overline{x} = 3042$ часови. Понатаму, како во задача 4.2.1 за $1 - \alpha = 95\% = 0.95$ се добива $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. На крајот, согласно формулата (4.2), се добива

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(3042 - 1.96 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}},\ 3042 + 1.96 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}}\right) \approx$$
$$\approx (3018, 3066),$$

т.е., со сигурност од 95% може да се тврди дека векот на траење на случајно избрана сијалица ќе биде помеѓу 3018 и 3066 часови.

Добиениот интервал е широк $3066 - 3018 = 48$ часови, а за да биде широк $w = 30$ часови треба да се испитаат

$$n = \left(\frac{2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{w}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 1.96 \cdot 120}{30}\right)^2 = 245.86 \approx 246$$

сијалици.

4.3.2. Еден испит го полагале определен број студенти. На случаен начин се избрани 45 од нив и констатирано е дека биле оценети со следните поени

98	92	86	92	85	62	90	64	73	75	54	65	68	50	67
74	52	78	75	65	83	70	90	77	90	65	70	60	65	67
35	58	47	45	62	50	45	60	35	25	34	39	61	70	57

Да се определи интевалот во кој со сигурност од 99% се наоѓа математичкото очекување на поените со кои е оценет студент што го полага испитот. Колку студенти треба да го полагаат испитот за да се добие 99%-тен интервал на доверба со ширина 10 поени?

Решение. Дадени се поените на случаен примерок од $n = 45$ студенти и не е дадена дисперзијата (стандардната девијација). Значи, потребно е да се определи интервал на доверба за математичкото очекување при непозната стандардна девијација и голем примерок $n = 45 \geq 30$. За таа цел се користи формулата (4.3).

Нека x_i, $i = 1, 2, \ldots, 45$, го означува бројот на поени со кој е оценет i-тиот студент. Нивната средната вредност е

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{45} \cdot (98 + 92 + 86 + \cdots + 70 + 57) = \frac{1}{45} \cdot 2925 = 65$$

а центрираната оценка на стандардната девијација е

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{44} \cdot \left[(98-65)^2 + (92-65)^2 + \cdots + (57-65)^2\right] = \\ = 305.36,$$

т.е., $s = 17.47$. За $1 - \alpha = 99\% = 0.99$ како во задача 4.2.3 се добива $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$.

Конечно, според формулата (4.3), се добива

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \equiv \left(65 - 2.575 \cdot \frac{17.47}{\sqrt{45}},\ 65 + 2.575 \cdot \frac{17.47}{\sqrt{45}}\right) = \\ \approx (58.2, 71.7),$$

па со сигурност од 99% може да се тврди дека случајно избран студент ќе биде биде оценет со повеќе од 58.2, помалку од 71.7 поени.

За добиениот интервал да биде широк $w = 10$ поени треба да се поседуваат податоци за

$$n = \left(\frac{2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot s}{w}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 2.575 \cdot 17.47}{10}\right)^2 = 80.95 \approx 81$$

студент.

4.3.3. Дневната потрошувачката на електрична енергија во едно претпријатие во текот на една година дадена е во следната табела

ел. енергија [MW]	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
денови во годината	22	49	124	118	52

Да се определи интервалот на доверба за средната вредност на дневната потрошувачка на електрична енергија со ниво на доверба од 90%.

Решение. Со наоѓање на средините на интервалите потрошена електрична енергија се добива табелата

ел. енергија [MW]	15	25	35	45	55
денови во годината	22	49	124	118	52

Во табелата дадена е потрошувачката на електрична енергија за $n = 22+49+124+118+52 = 365$ денови во годината. Значи треба да се определи интервал на доверба за математичкото очекување при непозната стандардна девијација и голем примерок $n = 365 \geq 30$ и за таа цел ќе се користи формулата (4.3).

Дадени се 5 различни потрошувачки, па нека n_i го означува бројот на денови со потрошувачка на електрична енергија од x_i MW, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, т.е.,

x_i [MW]	15	25	35	45	55
n_i-денови	22	49	124	118	52

Од овде, средната дневна потрошувачка изнесува

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{5} n_i \cdot x_i = \frac{1}{365} \cdot (22 \cdot 15 + 49 \cdot 25 + \cdots + 53 \cdot 55) = 38.53$$

со центрирана оценка на стандардната девијација

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{5} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 = \\ &= \frac{1}{364} \cdot \left[22 \cdot (15 - 38.53)^2 + \cdots + 52 \cdot (55 - 38.53)^2\right] = 114.67, \end{aligned}$$

т.е., $s = 10.7$. За $1 - \alpha = 90\%$ на ист начин како во задача 4.2.2 се добива $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$. Со овие параметри и со помош на формулата (4.3) се добива бараниот интервал на доверба

$$\begin{aligned} &\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \equiv \\ &\equiv \left(38.53 - 1.645 \cdot \frac{10.7}{\sqrt{365}},\ 38.53 - 1.645 \cdot \frac{10.7}{\sqrt{365}}\right) \approx (37.6, 39.5). \end{aligned}$$

Поинаку кажано, веројатноста дека средната вредност на дневната потрошувачка на електрична енергија ќе се наоѓа помеѓу 37.6 и 39.5 MW изнесува 90%.

4.3.4. При мерењето на концентрацијата на една активна супстанција во даден раствор добиени се вредностите 1.7431, 1.7496 и 1.7382 [g/l]. Да се определи 98%-тен интервал на доверба за математичкото очекување на концентрацијата на супстанцијата во растворот, ако е познато дека резултатите од мерењата се со нормална распределба со стандардна девијација 0.0059 [g/l]. Колку мерења се потребни за овој интервал да биде широк 0.02 [g/l]?

Решение. Во оваа задача треба да се определи интервал на доверба на математичко очекување при позната стандардна девијација $\sigma = 0.0059$ и мал примерок $n = 3 < 30$ земен од генерално множество со нормална рспределба. За таа цел се користи формулата (4.4). Средната концентрација на активната супстанција во растворот е

$$\overline{x} = \frac{1.7431 + 1.7496 + 1.7382}{3} = 1.7436,$$

а за $1-\alpha = 98\% = 0.98$ од табела 2 за $n-1 = 2$ степени на слобода и веројатност $p = \alpha/2 = 0.01$ се отчитува t-вредност 6.965. Значи $t_{\alpha/2} = t_{0.01} = 6.965$ па со формулата (4.4) го добиваме бараниот интервал на доверба

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(1.7436 - 6.965 \cdot \frac{0.0059}{\sqrt{3}},\ 1.7436 + 6.965 \cdot \frac{0.0059}{\sqrt{3}}\right) \approx (1.71987, 1.76732).$$

Тоа значи дека со сигурност од 98% просечната концентрација на активна супстанција во раствотот е помеѓу 1.71987 и 1.76732 g/l. За овој интервал (опсег) да биде широк 0.02 g/l треба да се извршат

$$n = \left(\frac{2 \cdot t_{\alpha/2} \cdot \sigma}{w}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 6.965 \cdot 0.0059}{0.02}\right)^2 = 16.887 \approx 17$$

мерења.

4.3.5. Бројот на часови на работа на мобилните телефони без да има потреба од полнење на батеријата е со нормална распределба. Еден корисник на мобилен телефон ги забележал следните периоди (изразени во часови) на непречена работа на мобилниот без полнење на батеријата: 84, 100, 92, 77 и 89. Да се определи 96%-тен интервал на доверба за средната вредност на бројот на часови помеѓу две последователни (неопходни) полнења на батеријата на мобилниот телефон. Колку податоци се потребни за ширината на 96%-тниот интервал на доверба да изнесува 10 часови?

Решение. Се бара да се пресмета интервал на доверба на математичко очекување при непозната дисперзија и мал примерок $n = 5 < 30$ земен од генерално множество со нормална рспределба. Тоа ќе се направи со формулата (4.5).

Средната вредност на дадените периоди на работа на телефонот без полнење на батеријата е

$$\overline{x} = \frac{1}{5} \cdot (84 + 100 + 92 + 77 + 89) = 88.4$$

часови, а центрираната оценка на стандардната девијација е

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot \big[(84 - 88.4)^2 + (100 - 88.4)^2 +$$
$$+ (92 - 88.4)^2 + (77 - 88.4)^2 + (89 - 88.4)^2\big] = 74.3,$$

т.е., $s = 8.62$. Понатаму, од табела 2 за $n - 1 = 4$ степени на слобода и веројатност $p = \alpha/2 = 0.02$ се отчитува t-вредност 2.999, т.е., $t_{\alpha/2} = t_{0.02} = 2.999$. Затоа бараниот интервал на доверба е

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(88.4 - 2.999 \cdot \frac{8.62}{\sqrt{5}},\ 88.4 + 2.999 \cdot \frac{8.62}{\sqrt{5}}\right) \approx (76.84, 99.96),$$

односно, средната вредност на бројот на часови помеѓу две последователни полнења на батеријата на мобилниот телефон, со сигурност од 96%, е помеѓу 76.84 и 99.96 часови.

За овој добиениот интервал на доверба да биде широк 10 часови потребно е да се поседуваат податоци за

$$n = \left(\frac{2 \cdot t_{\alpha/2} \cdot s}{w}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 2.999 \cdot 8.62}{10}\right)^2 = 26.73 \approx 27$$

полнења на батеријата.

Дополнителни задачи

4.3.6. Еден експеримент се повторува n пати и при тоа се добива средна вредност $\overline{x}$ и центрирана стандардна девијација s на големината што се набљудува.

а) $n = 80$, $\overline{x} = 0.302$ и $s = 0.021$;

б) $n = 80$, $\overline{x} = 0.32$ и $s = 0.021$;

в) $n = 20$, $\overline{x} = 0.302$ и $s = 0.021$;

г) $n = 20$, $\overline{x} = 0.32$ и $s = 0.021$.

За секој од овие случаи да се определи 99%-тен интервал на доверба за математичкото очекување на набљудуваната големина. Колку експерименти треба да се направат за овој интервал да биде широк 0.1?

4.3.7. Испитувано е времето што ѝ е потребно на една машина за производството на даден дел. Со 50 одделни мерења добиена е средна вредност 1.75 часови. Ако е познато дека стандардната девијација изнесува 0.2 часови, да се ореdели 99%-тен интервал на доверба за математичкото очекување на времето што ѝ е потребно на машината за производството на делот. Колку мерења треба да се направат за ширината на интервалот да изнесува 0.05 часови?

4.3.8. Внатрешниот дијаметар на една гумена заптивка треба да изнесува 20 mm. Измерени се 80 заптивки од една серија и добиена е средна вредност на дијаметарот 19.975 mm и центрирана оценка за стандардна девијација 0.03 mm. Да се определи 95%-тен интервал на доверба за математичкото очекување на дијаметарот на целата серија заптивки. Колку заптивки треба да се измерат за да се добие 95%-тен интервал на доверба со ширина 0.005 mm?

4.3.9. Во една анкета испитани се 2500 домаќинства во поглед на нивниот просечен месечен приход. Добиена е средна вредност од 21358 денари за сите анкетирани домаќинства и центрирана оценка за стандардна девијација од 1395 денари. Да се определи, со сигурност од 95%, во кои граници се движи приходот на просечно домаќинство. Колку домаќинства треба да се анкетираат за овој интервал да биде широк 1000 денари?

4.3.10. Времето што му е потребно на процесорот за реализација на даден алгоритам измерено е 52 пати и добиените вредности изразени во секунди, се:

0.045	0.136	8.788	0.079	3.985	1.267	0.379	0.327	0.242
0.136	0.130	0.036	0.136	0.600	0.209	0.506	0.064	0.182
0.088	0.194	0.118	0.258	4.170	0.554	0.412	0.045	0.209
0.361	0.049	0.070	1.639	0.258	0.670	0.567	0.912	0.333
0.182	1.055	0.091	0.579	1.894	0.291	0.445	3.046	
0.179	0.336	0.145	0.394	1.070	0.227	0.258	3.888	

Да се определи 95%-тен интервал на доверба за математичкотот очекување на времето што му е потребно на процесорот за извршување на алгоритамот. Колку мерења се потребни за 95%-тниот интервал на доверба да биде широк 0.02 секунди?

4.3.11. Во едно претпријатие во првите 50 денови од грејната сезона забележана е следната потрошувачката на мазут за греење (изразена во тони)

2.32	6.61	6.90	8.04	9.45	10.26	11.34	11.63	12.66	12.95
13.67	13.72	14.35	14.52	14.55	15.01	15.33	16.55	17.15	18.22
18.30	18.71	19.54	19.55	20.58	20.89	20.91	21.13	23.85	26.04
27.07	28.76	29.15	30.54	31.99	32.82	33.26	33.80	34.76	36.22
37.52	39.28	40.80	43.97	45.58	52.36	61.57	63.85	64.30	69.49

Да се определи 99%-тен интервал на доверба за средната вредност на потрошувачката на мазут.

4.3.12. Во една распространета мрежа за продажба на еден производ забележана е следната ефикасност на продавачите

продадени производи	100-150	150-200	200-250	250-300
продавачи	14	32	54	23

Да се определи интервалот на доверба за математичкото очекување на бројот на продадени производи за случајно избран продавач со ниво на доверба од 99%.

4.3.13. За да се провери точноста на една вага се вршат 5 мерења на тело за кое со сигурност се знае дека има маса 10 g. При тоа, средната вредност од резултатите на петте мерења е 10.0023 g и стандардната девијација е 0.0002 g. Да се определи 99%-тен интервал на доверба за математичкото очекување на резултатите од мерењата, ако се знае дека тие се со нормална распределба. Колку мерења се потребни за да се добие 99%-тен интервал на доверба со ширина 0.0005 g?

4.3.14. Измерена е телесната тежина на 16 атлетичари и добиена е средна вредност 65 kg и стандардна девијација 4 kg. Ако е познато дека телесната тежина на атлетичарите има нормална распределба, тогаш да се определи, со сигурност од 90%, во кои граници се движи телесната тежина на просечен атлетичар.

4.3.15. Пет парцели, секоја со површина од еден хектар, посејани се со пченица. Добиениот принос, по парцели, е: 6, 6.4, 5.9, 7 и 6.6 тони. Сметајќи дека приносот на пченица има нормална распределба со стандардна девијација 0.5 тони, да се определи 90%-тниот интервал на доверба за математичклото очекување на приносот.

4.3.16. Концентрацијата на фосфор во крвта на човекот е различна во секој момент и има нормална распределба. Кај еден пациент при 6 различни мерења добиени се следните концентрации: 5.6, 5.1, 4.6, 4.8, 5.7 и 6.4 mg/dl. Да се определи 90%-тен интервал на доверба за средната вредност на концентрацијата на фосфор во крвта на пациентот.

4.3.17. Три примероци од нов модел на автомобил се возат непрекинато по кружна патека и до појавата на првиот дефект поминуваат 540327, 480974 и 550913 km, соодветно. Познато е дека бројот на поминати километри има нормална распределба. Да се определи, со сигурност од 90%, во кои граници ќе се движи бројот на поминати километри до појавата на првиот дефект. Колку автомобили треба да се испитаат за тој опсег, со сигурност од 99%, да биде помал од 10000 km?

4.3.18. Задачите 4.3.1, 4.3.4, 4.3.7, 4.3.8, 4.3.9, 4.3.13, 4.3.14 и 4.3.14 да се решат под претпоставка дека не е позната стандардната девијација. Добиените резултати да се споредат маѓу себе.

4.4 ИНТЕРВАЛ НА ДОВЕРБА ЗА ДИСПЕРЗИЈАТА

Основни елементи од теорија

Решени задачи

4.4.1. Еден производител на освежителни пијалоци сака да провери во кои граници се движи средното отстапување на полненењето кај лименките кои "теоретски" треба да содржат 330 ml пијалок. За таа цел на случаен начин се избрани 20 лименки и нивната содржина е

335	330	327	322	328	333	341	327	322	312
336	330	336	336	321	329	325	333	334	327

Да се определи 99%-тен еднострал и двостран интервал на доверба за дисперзијата и стандардната девијација на содржината на пијалок во лименките ако е познато дека таа има нормална распределба.

Решение. Дадени се податоци за содржината на случаен примерок од $n = 20$ лименки со просечна содржина

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20} \cdot (335 + 330 + \cdots + 327) = \frac{1}{45} \cdot 6584 = 329.2\ l$$

и центрираната оценка на стандардната девијација е

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{19} \cdot \big[(0.335 - 0.3292)^2 + \\ + (0.330 - 0.3292)^2 + \cdots + (0.327 - 0.3292)^2\big] = 45.54,$$

Понатаму, $1 - \alpha = 99\% = 0.99$ и од табела 3 се отчитува:

степени слобода	веројатност	χ^2-вредност	заклучок
$n-1=19$	$p = 1-\alpha = 0.99$	7.633	$\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0.99} = 7.633$
$n-1=19$	$p = 1-\alpha/2 = 0.995$	6.844	$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.995} = 6.844$
$n-1=19$	$p = \alpha/2 = 0.005$	38.582	$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.005} = 38.582$

Со оглед на тоа што во условот на задачата е дадено дека содржината на пијалок во лименките има нормална распределба, едностраниот и двостраниот интервал на доверба за дисперзијата се

$$\left[0,\ \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha}}\right) \equiv \left[0,\ \frac{19 \cdot 45.54}{7.633}\right) = [0, 113.36),$$

односно

$$\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}},\ \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) \equiv \left(\frac{19 \cdot 45.54}{38.582},\ \frac{19 \cdot 45.54}{6.844}\right) = (22.43, 126.43).$$

Со коренување на границите на интервалите се добиваат едностраниот и двостраниот интервал на доверба за стандардната девијација, $[0, 10.65)$ и $(4.74, 11.24)$, соодветно.

Може да се заклучи дека со сигурност од 99% средното отстапување на полненењето кај лименките е помало од 10.65 ml, односно се наоѓа помеѓу 4.74 и 11.24 ml.

4.4.2. При едно испитување на концентрацијата на бифенили (штетна материја) во почвата од 5 случајно избрани примероци почва добиена е центрирана оценка на стандардната девијација од 0.45 mg/kg. Да се определи 95%-тен едностран и двостран интервал на доверба за дисперзијата и стандардната девијација на концентрацијата на бифенили во почвата, ако е познато дека таа има нормална распределба.

Решение. Во условот на задачата дадено е: $n = 5$, $s = 0.45$ и $1-\alpha = 95\% = 0.95$. Слично како во претходната задача, од табела 3 се отчитува:

степени слобода	веројатност	χ^2-вредност	заклучок
$n-1=4$	$p = 1-\alpha = 0.95$	0.711	$\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0.95} = 0.711$
$n-1=4$	$p = 1-\alpha/2 = 0.975$	0.484	$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.975} = 0.484$
$n-1=4$	$p = \alpha/2 = 0.025$	11.143	$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.025} = 11.143$

Бидејќи концентрацијата на бифенили во почвата има нормална распределба, за еднострaниот и двостраниот интервал на доверба за дисперзијата се добива

$$\left[0,\ \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha}}\right) \equiv \left[0,\ \frac{4\cdot 0.45^2}{0.711}\right) = [0, 1.14),$$

односно

$$\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}},\ \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) \equiv \left(\frac{4\cdot 0.45^2}{11.143},\ \frac{4\cdot 0.45^2}{0.484}\right) = (0.07, 1.67),$$

а со коренување на границите на интервалите се добиваат еднострaниот и двостраниот интервал на доверба за стандардната девијација, $[0, 1.07)$ и $(0.26, 1.29)$, соодветно.

Значи, веројатноста дека стандардната девијација на концентрацијата на бифенили во случајно избран примерок почва ќе биде помала од 0.07 mg/kg, односно помеѓу 0.26 и 1.29 mg/kg, е 95%.

4.4.3. Со анкетирање на 35 случајно избрани играчи на спортска прогноза добиени се следните податоци за нивната добивка (во илјади денари)

добивка	(-10)-(-5)	(-5)-0	0-5	5-10	10-15
број на играчи	3	14	11	5	2

Да се определи 90%-тен едностран и двостран интервал на доверба за дисперзијата и стандардната девијација на добивката на играчите ако е познато дека таа има нормална распределба.

Решение. Наоѓајќи ги средините на интервалите на добивка и означувајќи го со n_i бројот на играчи кои постигнале добивка x_i, се добива следната табела

x_i-добивка	-7.5	-2.5	2.5	7.5	12.5
n_i-број на играчи	3	14	11	5	2

Се работи за случаен примерок од $n = 35$ играчи на спортска прогноза со средна вредност на добивките

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{5} n_i \cdot x_i = \frac{1}{35} \cdot [3 \cdot (-7.5) + 14 \cdot (-2.5) + \cdots + 2 \cdot 12.5] = 0.93$$

и центрирана оценка на стандардната девијација на нивните добивки

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{5} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \left[3 \cdot (-7.5 - 0.93)^2 + \cdots + 2 \cdot (12.5 - 0.93)^2\right] = 26.13.$$

За $1 - \alpha = 90\% = 0.9$ и $n - 1 = 34$ степени на слобода од табела 3 се отчитува

ст. сл.	веројатност	χ^2-вредност	заклучок
34	$p = 1 - \alpha = 0.9$	$\frac{13.787+20.707}{2} = 17.247$	$\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0.9} = 17.247$
34	$p = 1 - \alpha/2 = 0.95$	$\frac{18.493+26.509}{2} = 22.501$	$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.95} = 22.501$
34	$p = \alpha/2 = 0.05$	$\frac{43.773+55.758}{2} = 46.765$	$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.05} = 46.765$

Дадено е дека добивката на играчите има нормална распределба, па затоа еднностраниот и двостраниот интервал на доверба за нејзината дисперзијата се

$$\left[0,\ \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha}}\right) \equiv \left[0,\ \frac{34 \cdot 26.13}{17.247}\right) = [0, 51.51),$$

односно

$$\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}},\ \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) \equiv \left(\frac{34 \cdot 26.13}{46.765},\ \frac{34 \cdot 26.13}{22.501}\right) = (19, 39.48),$$

а со коренување на границите на интервалите, еднностраниот и двостраниот интервал на доверба за стандардната девијација се $[0, 7.18)$ и $(4.36, 6.28)$, соодветно.

Значи, со сигурност од 90% може да се тврди дека стандардната девијација на добивката на играчите е помала од 7180 денари, т.е., се наоѓа помеѓу 4360 и 6280 денари. (добивките во табелата се дадени во илјади денари)

Дополнителни задачи

4.4.4. Еден експеримент се повторува n пати и при тоа се добива центрирана оценка за стандардна девијација s на големината што се набљудува.

а) $n = 50$ и $s = 4$;
б) $n = 10$ и $s = 4$.

За секој од овие случаи да се определи 95%-тен едностран и двостран интервал на доверба за дисперзијата на набљудуваната големина. Колку експерименти треба да се направат за овој интервал да биде широк 0.2?

4.4.5. Четири последователни мерења на концентрацијата на течен CO_2 во една карпа ги нава следните вредности: 86.6, 84.6, 85.5 и 85.9 молови. Да се определи 99%-тен едностран и двостран интервал на доверба за дисперзијата и стандардната девијација на концентрацијата на CO_2 во карпата, ако е познато дека таа има нормална распределба.

4.4.6. Од едно генерално множество што има нормална распределба земен е случаен примерок со обем 40 и добиени се следните резултати

x_i	-8	-3	-1	1	5	9	10
n_i	2	7	10	11	6	3	1

Да се определи 90%-тен едностран и двостран интервал на доверба за дисперзијата.

4.4.7. Од едно генерално множество што има нормална распределба земен е случаен примерок со обем 70 и пресметано е дека центрираната оценка на дисперзијата изнесува 1.13. Да се определи 95%-тен едностран и двостран интервал на доверба за стандардната девијација.

4.4.8. За ситуациите опишани во задачите 4.3.4, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.13, 4.3.14, 4.3.15, 4.3.16 и 4.3.17 да се определи 95%-тен едностран и двостран интервал на доверба за дисперзијата и стандардната девијација.

Глава 5

ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ

ЗА ПАРАМЕТРИТЕ НА РАСПРЕДЕЛБАТА

5.1 ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ ЗА ФРЕКФЕНЦИЈАТА КАЈ СЕРИЈА НЕЗАВИСНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

5.1.1. Еден производител на монитори тврди дека 6% од неговите монитори се расипуваат во првите три години од работата. Врз база на ова тврдење, дистрибутерот на овие монитори дава гаранција од 3 години. Од првите 200 продадени монитори, 18 се расипале во гарантниот рок. Со ниво на значајност а) 0.05 и б) 0.025 да се провери дали процентот на монитори кои се расипуваат во првите три години од работата е поголем од оној што го декларирал производителот. Одговорот да се образложи.

Решение. Параметарот што треба да се испитува е процентот на монитори, p, кои се расипуваат во првите три години од работата. Производителот на монитори тврди $p = p_0 \equiv 6\%$, а треба да се провери дали $p > p_0 \equiv 6\%$. Значи треба да се тестира нултата хипотеза

$$H_0 : \ p = 6\% = 0.06$$

наспроти алтернативната хипотеза

$$H_a:\ p > 6\% = 0.06.$$

Од $n = 200$ продадени монитори, во гарантниот рок се расипале $m = 18$ монитори. Центрираната оценка за веројатноста случајно избран монитор да се расипи во гарантниот рок е

$$\widehat{p} = \frac{m}{n} = \frac{18}{200} = 0.09.$$

Неравенствата $n\widehat{p} = 18 \geq 10$ и $n(1-\widehat{p}) = 182 \geq 10$ дозволуваат да се продолжи со тестирањето. Тест-статистиката е

$$z^* = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \equiv \frac{0.09 - 0.06}{\sqrt{0.06 \cdot (1-0.06)/200}} \approx 1.79.$$

а) За ниво на значајност $\alpha = 0.05$ граничната вредност е $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ и се отчитува од табела 1 како z-вредност што одговара на веројатност $1 - \alpha = 0.95$. Во овој случај, заради непостоење на веројатност 0.95 во табелата, граничната вредност е средина од z-вредностите 1.64 и 1.65, кои одговараат на веројатности 0.9495 и 0.9505, соодветно. Од

$$z^* = 1.79 > z_\alpha = 1.645$$

се заклучува дека нултата хипотеза треба да се отфрли (со ниво на значајност $\alpha = 0.05$). Има доволно докази кои ја поддржуваат алтернативната хипотеза: процентот на монитори кои се расипуваат во првите три години од работата е поголем од $p_0 = 6\%$.

б) Слично како во делот (а) се добива дека за ниво на доверба $\alpha = 0.025$ граничната вредност е $z_\alpha = z_{0.025} = 1.96$. Сега условот $z^* > z_\alpha$ не е исполнет и нема причина нултата хипотеза да се отфрли.

Образложение: p-вредноста на овој тест, според табелата 1, изнесува

$$p\text{-вредност} = P(Z \geq z^*) = 1 - P(Z < z^*) = 1 - P(Z < 1.79) = 1 - 0.9633 = 0.0367.$$

Тоа значи дека: ако хипотезата H_0 е точна, т.е., ако точно 6% од мониторите се расипуваат во првите три години од работата, тогаш веројатноста од 200 случајно избрани монитори во првите три години да се расипат 18, или повеќе од 18, еднаква е на 0.0367. Оваа веројатност е помала од 0.05, но не е помала од 0.025. Тоа се дадените нивоа на значајност кои имаат улога на максимална (претходно дефинирана) веројатност која може да толерира. Затоа во првиот случај хипотезата H_0 се отфрла, а во вториот не.

5.1.2. Деканатот на еден факултет спровел истражување и заклучил дека проодноста на студентите изнесува само 57% (57% од студентите се запишале во следната студиска година). За зголемување на проодноста спроведени се определени реформи на факултетот. Во првата учебна година по реформите евидентирано е дека од 942 студенти во следната студиска година се запишале 500. Дали, со ниво на значајност од 0.01, може да се смета дека со реформите е постигнат спротивен ефект? Одговорот да се образложи.

Решение. Во оваа задача предмет на интерес е параметарот p кој ја означува проодноста на студентите. Пред реформите вредноста на p била 57%, а треба да се провери дали по реформите се намалила, т.е., треба да се тестираат хипотезите

$$H_0: \; p = 0.57$$
$$H_a: \; p < 0.57.$$

Во првата учебна година по реформите од $n = 942$ студенти во следната студиска година се запишале $m = 500$, односно проодноста е

$$\widehat{p} = \frac{m}{n} = \frac{500}{942} \approx 0.53.$$

Тестирањето може да продолжи бидејќи $n\widehat{p} = 500 \geq 10$ и $n(1-\widehat{p}) = 442 \geq 10$. Тест-статистиката изнесува

$$z^* = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \equiv \frac{0.53 - 0.57}{\sqrt{0.57 \cdot (1 - 0.57)/942}} \approx -2.48,$$

а граничната вредност за ниво на значајност $\alpha = 0.01$ е $z_\alpha = z_{0.01} = 2.325$ (се отчитува од табела 1 како z-вредност што одговара на веројатност $1 - \alpha = 0.99$ на ист начин како во задача 5.1.1). На крајот, од

$$z^* = -2.48 < -z_\alpha = -2.325,$$

со ниво на значајност $\alpha = 0.01$ може да се заклучи дека нултата хипотеза треба да се отфрли, а да се прифати алтернативната хипотеза: проодноста на студентите е помала од $p_0 = 57\%$.

Образложение: Со помош на табелата 1 се добива

$$p\text{-вредност} = P(Z \leq z^*) = P(Z \leq -2.48) = 0.0066.$$

Па, ако хипотезата H_0 е точна, односно ако проодноста е 57%, тогаш веројатноста од 942 студенти во следната студиска година да се запишат 500, или помалку од 500, изнесува 0.0066. Тоа е помалку од нивото на значајност 0.01, што ја претставува максималната веројатност која е претходно дефинирано дека може да толерира. Од тоа следува дека хипотезата H_0 не е точна.

5.1.3. Од 600 фрлања на една коцка, единица се појавила 86 пати. Дали е тоа доволен доказ дека коцката не е хомогена? Да се користи ниво на значајност 0.1 и одговорот да се образложи.

Решение. Треба да се испита параметарот p кој ја означува веројатноста за појавување на единица. Ако коцката е хомогена тогаш $p = p_0 \equiv 1/6$, а ако не е хомогена тогаш $p \neq p_0 \equiv 1/6$. Значи, треба да се тестираат хипотезите

$$H_0: \; p = 1/6$$
$$H_a: \; p \neq 1/6.$$

При $n = 600$ фрлања на коцката, единица се појавила $m = 94$ пати. Според тоа центрираната оценка на веројатноста за појавување е

$$\widehat{p} = \frac{m}{n} = \frac{86}{600}.$$

Неравенствата $n\widehat{p} = 86 \geq 10$ и $n(1-\widehat{p}) = 514 \geq 10$ се точни, па тестирањето може да продолжи. За тест-статистиката се добива

$$z^* = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \equiv \frac{86/600 - 1/6}{\sqrt{1/6 \cdot (1-1/6)/600}} \approx -1.53,$$

а за граничната вредност со ниво на значајност $\alpha = 0.1$ се добива $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$ (се отчитува од табела 1 како z-вредност што одговара на веројатност $1 - \alpha/2 = 0.95$ на ист начин како во делот (а) од задача 5.1.1).

За $z^* = -1.53$ и $z_{\alpha/2} = 1.645$ не е исполнет ниту условот $z^* < -z_{\alpha/2}$, ниту условот $z^* > z_{\alpha/2}$. Затоа не постојат докази за да се отфрли нултата хипотеза (со ниво на значајност $\alpha = 0.1$).

Образложение: За p-вредноста со помош на табелата 1 се добива

$$p\text{-вредност} = P(|Z| \geq |z^*|) = 2 \cdot P(Z \leq -|z^*|) = 2 \cdot P(Z \leq -1.53) = 0.126.$$

Ако нултата хипотеза е точна, т.е., ако коцката е хомогена, тогаш веројатноста при 600 фрлања бројот на единици да отстапува од ”теоретскиот” $n \cdot p_0 = 100$ за повеќе од $|n \cdot p_0 - n \cdot \widehat{p}| = 14$ (колку што во реалноста се случило) изнесува 0.126. Тоа е повеќе од нивото на значајност 0.1 и затоа нема докази за да се отфрли H_0.

Дополнителни задачи

5.1.4. Со помош на табелата ?? да се определат вредностите z_α и $z_{\alpha/2}$, дефинирани во елементите од теоријата, за: а) $\alpha = 0.01$; б) $\alpha = 0.05$ и в) $\alpha = 0.1$.

5.1.5. Теоретски анализи укажуваат дека веројатноста за настапување на настанот A при еден експеримент изнесува $p_0 = P(A) = 0.2$. За да се провери овој заклучок експериментот се повторува $n = 100$ пати и при тоа настанот A настапува

а) $m = 22$ пати;
б) $m = 18$ пати;
в) $m = 25$ пати;
г) $m = 16$ пати.

За секој од овие случаи да се провери дали резултатите:

1) ја потврдуваат теоретски утврдената веројатност за настапување на настанот A;
2) укажуваат дека вистинската веројатност за настапување на настанот A е поголема од теоретски утврдената; или
3) укажуваат дека вистинската веројатност за настапување на настанот A е помала од теоретски утврдената.

Да се користи ниво на значајност $\alpha = 0.01$ и одговорот да се образложи.

5.1.6. Од сите посетители на еден супермаркет, само 0.4% го купуваат производот A. После интензивна кампања на производителот на производот A, констатирано е дека од 250 посетители на супермаркетот, 2 го купиле производот. Дали може, со ниво на значајност од 0.1, да се смета дека кампањата предизвикала зголемување на продажбата? Одговорот да се образложи.

5.1.7. Францускиот математичар Буфон (1707−1788) фрлил монета 4040 пати и при тоа глава се појавила 2048 пати. Дали може, со ниво на значајност 0.1 да се тврди дека монетата не е хомогена? Одговорот да се образложи.

5.1.8. Еден сопственик на ресторан приметил дека секој четврти посетител на ресторанот повторно доаѓа во него. Откако го променил ентериерот, сопственикот приметил дека од 86 посетители, 22 повторно дошле во ресторанот. Дали, со ниво на значајност од 0.05, сопственикот на ресторанот може да смета дека промената на ентериерот ја зголемила посетеноста? Одговорот да се образложи.

5.1.9. Во една анкета од 50 испитаници, 19 се изјасниле дека повеќе им се допаѓа инстант, отколку филтер. Дали, со ниво на значајност од 0.01, може да се смета дека луѓето повеќе сакаат филтер кафе? Одговорот да се образложи.

5.1.10. Еден кошаркар во претходната сезона погодил само 40% од сите шутеви од линијата за слободни фрлања. После интензивни подготовки во текот на летото, на почетокот од новата сезона од 40 слободни фрлања, погодил 25. Дали подготовките во текот на летото ја зголемиле прецизноста на кошаркарот? Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

5.1.11. На претседателските избори во една држава има два кандидати, A и B. Победува оној кој ќе добие повеќе од половина гласови од луѓето кои ќе излезат да гласаат. Од 1500 анкетирани со право на глас, 982 се изјасниле дека ќе излезат да гласаат, а 481 од нив рекле дека ќе гласаат за кандидатот A. Дали врз основа на анкетата може да се заклучи кој од кандидатите ќе победи на изборите? Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

5.1.12. Едно претпријатие извезува 30% од своето производство. Владата извршила измени на начинот на кој ги наградува претпријатијата извозници. По тие измени раководството на претпријатието констатирало дека од 820 производи, извезло 231. Дали врз база на овој податок може да се заклучи дека измената на начинот на наградување влијаела врз извозот на претпријатието? Во случај на потврден одговор, дали може да се каже како влијаела, со зголемување или намалување на извозот? Во обата случаи да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

5.1.13. Смртноста од одредена болеста изнесува 20%. Нов лек, за да се тестира, даден им е на 50 болни кои прифатиле да го земат и 44 од нив биле излекувани. Дали може да се тврди дека новиот лек е поефикасен од досегашните? Да се користи ниво на значајност 0.1 и одговорот да се образложи.

5.2 ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ ЗА МАТЕМАТИЧКОТО ОЧЕКУВАЊЕ

Основни елементи од теорија

Решени задачи

5.2.1. Еден производител на сијалици декларира век на траење 3000 часови. За проверка, измерен е векот на траење на 50 сијалици и при тоа добиен е среден век на траење 2974 часови. Ако се знае дека векот на траење на една сијалица има стандардна девијација од 120 часови, дали може, со ниво на значајност а) 0.1 и б) 0.05 да се тврди дека средниот век на траење на сијалиците е помал од 3000 часови? Одговорот да се образложи.

Решение. Предмет на испитување во оваа задача е параметарот μ кој ја означува аритметичката средина (средната вредност) на векот на траење на сијалиците. За овој параметар производителот на сијалиците тврди дека изнесува $\mu_0 = 3000$ часови, а треба да се провери дали е помал од $\mu_0 = 3000$ часови. Значи треба да се тестира нултата хипотеза

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \equiv 3000$$

наспроти алтернативната хипотеза

$$H_0: \ \mu < \mu_0 \equiv 3000.$$

Со испитување на $n = 50$ сијалици добиен е среден век на траење $\overline{x} = 2974$ часови. Бидејќи $n \geq 30$ тестирањето може да продолжи. Со дадената стандардна девијација $\sigma = 120$ часови, тест-статистиката е

$$z^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \equiv \frac{2974 - 3000}{120/\sqrt{50}} \approx -1.53.$$

а) За ниво на значајност $\alpha = 0.05$ граничната вредност $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ се отчитува од табела 1 како z-вредност што одговара на веројатност $1 - \alpha = 0.95$, слично како во делот (а) од задача 5.1.1. Неравенството

$$z^* = -1.53 < -z_\alpha = -1.645$$

не е точно, па затоа нема доволно докази нултата хипотеза да се отфрли.

б) Слично како во претходниот дел, за ниво на значајност $\alpha = 0.1$ се добива гранична вредност $z_\alpha = z_{0.1} = 1.285$. Сега неравенството

$$z^* = -1.53 < -z_\alpha = -1.285$$

е точно, па со ниво на значајност $\alpha = 0.1$ може да се заклучи дека има доволно докази да се отфрли нултата хипотеза и да се прифати алтернативната, т.е., има доволно докази да се тврди дека средниот век на траење е помал од 3000 часови.

Образложение: Според табелата 1 p-вредноста на овој тест изнесува

$$p\text{-вредност} = P(Z \leq z^*) = P(Z \leq -1.53) = 0.063.$$

Значи под претпоставка дека хипотезата H_0 е точна, т.е., ако средниот век на траење на сијалиците е 3000 часови, тогаш веројатноста од 50 испитани сијалици да се добие среден век на траење 2974, или помал, изнесува 0.063. Оваа веројатност е помала од 0.1, но не е помала од 0.05, а тоа се соодветните нивоа на значајност кои имаат улога на максимална (претходно дефинирана) веројатност која може да толерира. Затоа во првиот случај хипотезата H_0 не се отфрла, а во вториот се отфрла.

5.2.2. Пред воведувањето на новини во начинот на спроведување на испитот по еден предмет, просечниот успех, т.е., број на поени со кој биле оценети студентите бил 57.5. По воведување на новините постигнати се следните резултати

98	92	86	92	85	62	90	64	73	75	54	65	68	50	67
74	52	78	75	65	83	70	90	77	90	65	70	60	65	67
35	58	47	45	62	50	45	60	35	25	34	39	60	69	56

Да се провери, со ниво на значајност 0.01, дали новините во начинот на спроведување на испитот предизвикале промена на средниот успех на студентите и одговорот да се образложи.

Решение. Нека μ ја означува аритметичката средина на број на поени со кои се оценети студентите. Ако новините не предизвикале промена на средниот успех на студентите тогаш треба $\mu = \mu_0 \equiv 57.5$, а во спротивно треба $\mu \neq \mu_0 \equiv 57.5$. Значи треба да се тестираат хипотезите

$$H_0: \ \mu = 61.5$$
$$H_a: \ \mu \neq 61.5.$$

Дадени се поените со кои $n = 45$ студенти биле оценети по воведувањето на новините. Бидејќи $n \geq 30$ може да се продолжи со пресметка на средниот број поени со кои биле оценети 45-те студенти

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{45} \cdot (98 + 92 + \cdots + 56) = \frac{1}{45} \cdot 2922 \approx 64.9$$

и соодветната центрирана оценка на стандардната девијација

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{44} \cdot \left[(98 - 64.9)^2 + \right.$$
$$\left. + (92 - 64.9)^2 + \cdots + (56 - 64.9)^2\right] \approx 305.7,$$

т.е., $s \approx 17.5$. Затоа тест-статистиката е

$$z^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \equiv \frac{64.9 - 57.5}{17.5/\sqrt{45}} \approx 2.84.$$

Потребна е уште граничната вредност за ниво на значајност $\alpha = 0.01$. Таа се отчитува од табела 1 како z-вредност што одговара на веројатност $1 - \alpha/2 = 0.995$ и изнесува $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$. Бидејќи од неравенства

$$z^* = 2.84 < -z_{\alpha/2} = -2.575 \quad \text{и} \quad z^* = 2.84 > z_\alpha = 2.575,$$

барем едно е точно (второто), следува дека (со ниво на значајност 0.01) нултата хипотеза треба да се отфрли, а да се прифати алтернативната: воведените новини во начинот на испитување предизвикале промена на средниот успех на студентите.

Образложение: p-вредноста (со помош на табелата 1) е

$$p\text{-вредност} = P(|Z| \geq |z^*|) = 2 \cdot P(Z \leq -|z^*|) = 2 \cdot P(Z \leq -2.84) = 0.0046.$$

Ако H_0 важи, т.е., ако средниот успех на студентите е $\mu_0 = 57.5$ поени, тогаш веројатноста од 45 студенти да се добие среден број на поени кој ќе отстапува од $\mu_0 = 57.5$ за повеќе од $|\overline{x} - \mu_0| = |64.9 - 57.5| = 7.4$ (колку што отстапува кај дадените податоци) изнесува 0.0046. Тоа е помалку од нивото на значајност 0.01 (претходно дефинирана максимална веројатност која може да толерира) и затоа H_0 се отфрла.

5.2.3. Висината на 400 случајно избрани средношколци од една област дадена е во следната табела

висина [cm]	160-165	165-170	170-175	175-180	180-185
ученици	30	55	131	123	61

Дали може да се тврди дека во таа област средношколците се повисоки од просекот, кој според извештаи на Обединетите нации за таа возраст изнесува 173.5 cm? Да се користи ниво на значајност 0.02 и одговорот да се образложи.

Решение. Треба да се провери дали средната висина, μ, на средношколците во областта во која се направени мерењата е еднаква на $\mu_0 = 173.5$ cm или е поголема од $\mu_0 = 173.5$ cm, т.е., треба да се тестираат хипотезите

$$H_0: \ \mu = 173.5$$
$$H_a: \ \mu > 173.5.$$

Нека n_i го означува бројот на ученици со висина x_i. Тогаш, со наоѓање на средината на интервалите на висина се добива следната табела

i	1	2	3	4	5
x_i-висина [cm]	162.5	167.5	172.5	177.5	182.5
n_i-ученици	30	55	131	123	61

Средната висина на овие $n = 400 \geq 30$ ученици изнесува

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{5} n_i \cdot x_i = \frac{1}{40} \cdot (30 \cdot 162.5 + 55 \cdot 167.5 + \cdots + 61 \cdot 182.5) = 174.125 \, cm,$$

со центрирана оценка на стандардната девијација

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{5} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 =$$
$$= \frac{1}{399} \cdot \left[30 \cdot (162.5 - 174.125)^2 + \cdots + 55 \cdot (167.5 - 174.125)^2\right] \approx 31.3$$

т.е., $s \approx 5.6$ cm. Затоа тест-статистиката е

$$z^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \equiv \frac{174.125 - 173.5}{5.6/\sqrt{400}} \approx 2.23.$$

За да се заврши тестирањето потребна е уште граничната вредност за ниво на значајност $\alpha = 0.02$ и таа изнесува $z_\alpha = z_{0.02} = 2.055$ (се отчитува од табела 1 на ист начин како во задача 5.1.1). Конечно,

$$z^* = 2.23 > z_\alpha = 2.055$$

и тоа е доволен доказ за (со ниво на значајност 0.02) да се отфрли нултата и да се прифати алтернативната хипотеза: средната висина на средношколците во областта во која се направени мерењата е поголема $\mu_0 = 173.5$ cm.

Образложение: Со помош на табелата 1 се добива p-вредност

$$p\text{-вредност} = P(Z \geq z^*) = 1 - P(Z < z^*) = 1 - P(Z < 2.23) = 1 - 0.9871 = 0.0129.$$

Под претпоставка дека нултата хипотеза е точна, т.е., ако средната висина на средношколците е $\mu_0 = 173.5$ cm, тогаш веројатноста од 400 средношколци да се добие средна висина 174.125 cm, или повеќе, изнесува 0.0129. Тоа е помалку од нивото на значајност 0.02 (претходно дефинирана максимална веројатност која може да толерира) и затоа H_0 се отфрла.

5.2.4. Еден производител на сирење се сомнева дека еден од добавувачите додава вода во млекото. Познато е дека температурата на замрзнување на млеко во кое нема додадено вода има нормална распределба со математичко очекување -0.545 °C и стандардна девијација 0.008 °C. Исто така, познато е дека со додавање на вода во млекото, неговата температура на замрзнување се зголемува. Пет последователни испораки на млеко од "осомничениот" добавувач имаат средна температурата на мрзнење -0.538 °C. Дали, со ниво на значајност од 0.05 може да се тврди дека добавувач додава вода во млекото? Одговорот да се образложи.

Решение. За да се утврди дали во млекото е додадена вода потребно е за параметарот μ : аритметичката средина на температурата на замрзнување на млекото, да се тестираат хипотезите

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \equiv -0.545°\text{C}$$
$$H_a: \ \mu > \mu_0 \equiv -0.545°\text{C}.$$

Дадена е средната температурата на мрзнење $\overline{x} = -0.538$ °C добиена со мерење на $n = 5$ примероци. Иако $n < 30$ постапката може да продолжи бидејќи е во условот на задачата е нагласено дека температурата на замрзнување на млекото има нормална распределба со стандардна девијација $\sigma = 0.008$ °C. Така за тест-статистиката се добива

$$t^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \equiv \frac{-0.538 - (-0.545)}{0.008/\sqrt{5}} \approx 1.96.$$

Граничната вредност, заради малиот примерок ($n = 5 < 30$), се отчитува од табела 2 за $n - 1 = 4$ степени на слобода и веројатност $p = \alpha = 0.05$ и изнесува $t_\alpha = z_{0.05} = 2.132$. На крајот, неравенството

$$t^* = 1.96 > t_\alpha = 2.132$$

не е точно, па може да се заклучи, со ниво на значајност 0.05, дека нема основа нултата хипотеза да се отфрли, т.е., нема докази дека добавувачот додава вода во млекото.

Образложение: За p-вредноста

$$p\text{-вредност} = P(T \geq t^*) = P(T \geq 1.96),$$

од табелата 2, за $n-1=4$ степени на слобода, се приметува дека: најблиску до вредноста 1.96 се вредностите 1.533 и 2.132, кои одговараат на веројатности 0.1 и 0.05, соодветно. Значи, бараната p-вредност е помеѓу 0.05 и 0.1. Тоа е повеќе од даденото ниво на значајност 0.05, т.е., од претходно дефинираната максимална веројатност која може да толерира, и затоа H_0 не се отфрла.

5.2.5. Концентрација на една штетна материја во воздухот има нормална распределба со математичко очекување 1.18 mg/m^3. Седум мерења на воздухот на една локација ги дале следните вредности за концентрација на штетната материја: 1.25, 1.11, 0.92, 0.99, 1.01, 0.89 и 1.02 mg/m^3. Дали резултатите од мерењата се доволни за да се тврди дека концентрација на штетната материја во воздухот е пониска од просечната, со ниво на значајност од 0.01. Одговорот да се образложи.

Решение. Потребно е да се тестираат хипотези за параметарот μ - средната концентрација на штетната материја во воздухот, и тоа:

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \equiv 1.18 \text{ mg/m}^3$$
$$H_a: \ \mu < \mu_0 \equiv 1.18 \text{ mg/m}^3.$$

Со $n = 7$ мерења добиена е средна концентрација на штетни материи

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7} \cdot (1.25 + 1.11 + \cdots + 1.02) = \frac{1}{7} \cdot 7.19 \approx 1.03 \text{ mg/m}^3$$

и центрирана оценка на стандардната девијација

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{6} \cdot \big[(1.25 - 1.03)^2 + \\ + (1.11 - 1.03)^2 + \cdots + (1.02 - 1.03)^2\big] \approx 0.013,$$

т.е., $s \approx 0.114$ mg/m^3. Бројот на мерења на воздухот ($n = 7$) е помал од 30, но концентрацијата на штетната материја во воздухот има нормална распределба, па затоа тестирањето може да продолжи со определување на тест-статистиката

$$t^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \equiv \frac{1.03 - 1.18}{0.114/\sqrt{7}} \approx -3.48$$

и на граничната вредност $t_\alpha = z_{0.01} = 3.143$ (се отчитува од табела 2 за $n-1 = 6$ степени на слобода и веројатност $p = \alpha = 0.01$).

Условот

$$t^* = -3.48 < -t_\alpha = -3.143$$

е исполнет, а тоа значи дека H_0 треба да се отфрли, а H_a да се прифати, односно концентрацијата на штетната материја во воздухот на локацијата каде е извршено мерењето е помала од 1.18 mg/m^3.

Образложение: За ова тестирање

$$p\text{-вредност} = P(T \leq t^*) = P(T \leq -3.48) = P(T \geq 3.48).$$

Во табелата 2, за $n-1 = 6$ степени на слобода, најблиску до 3.48 се вредностите 3.143 и 3.707, кои одговараат на веројатности 0.01 и 0.005, соодветно. Затоа, бараната p-вредност е помеѓу 0.005 и 0.01, што е помалку од претходно дефинираната максимална веројатност која може да толерира (нивото на значајност 0.01), и затоа H_0 се отфрла.

Дополнителни задачи

5.2.6. Со помош на табелите ?? и ??? да се определат вредностите z_α, $z_{\alpha/2}$, t_α, и $t_{\alpha/2}$, дефинирани во елементите од теоријата, за: а) $\alpha = 0.01$; б) $\alpha = 0.05$ и в) $\alpha = 0.1$.

5.2.7. Теоретски анализи укажуваат дека математичкото очекување на случајната променлива X изнесува $\mu_0 = 0.3$. За да се провери овој заклучок експериментот се повторува n пати и при тоа се добива средна вредност $\overline{x}$ и центрирана оценка за стандардна девијација s.

а) $n = 80$, $\overline{x} = 0.302$ и $s = 0.021$;
б) $n = 80$, $\overline{x} = 0.32$ и $s = 0.021$;
в) $n = 20$, $\overline{x} = 0.302$ и $s = 0.021$;
г) $n = 20$, $\overline{x} = 0.32$ и $s = 0.021$.

За секој од овие случаи да се провери дали резултатите:

1) ја потврдуваат теоретски утврдената вредност на математичкото очекување на X;
2) укажуваат дека вистинската вредноат на математичкото очекување на X е поголема од теоретски утврдената; или

3) укажуваат дека вистинската вредноат на математичкото очекување на X е помала од теоретски утврдената.

Да се користи ниво на значајност $\alpha = 0.01$ и одговорот да се образложи. Истите барања да се разгледаат ако е позната стандардната девијација на X, $\sigma_X = 0.02$ и добиените резултати да се споредат.

5.2.8. Горниот крвен притисок кај луѓето на возраст од 35 до 44 години е 127 со стандардна девијација 7. Едно испитување покажува дека средната вредност на горниот крвен притисок кај 55 менаџери е 138. Дали ова испитување ја потврдува пезата дека менаџерите се подложени на поголем стрес од останатите луѓе, т.е., дали кај менаџерите горниот крвен притисок е повисок од нормалниот. Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

5.2.9. Во процесорот на еден компјутер треба да е вграден генератор на случајни броеви кои се со униформна распределба на сегментот $[0, 1]$, со математичко очекување 0.5 и стандардна девијација 0.0833. Програма за генерирање на 100 случајни броеви дава броеви чија средна вредност е 0.4817. Дали според овие резултати може да се каже дека во процесорот е вграден некој друг генератор на случајни броеви? Да се користи ниво на значајност 0.04 и одговорот да се образложи.

5.2.10. Просечната дневна продажба во еден супермаркет изнесува 2.1 милиони денари со стандардна девијација 0.15 милиони денари. Продажбата (изразена во милиони денари) во 45 денови по воведувањето на нови даночни прописи е:

1.92	1.86	1.92	1.85	1.62	1.50	1.45	1.60	1.54	1.65	1.68	1.50	1.67
1.74	1.78	1.75	1.65	1.83	1.90	1.77	1.90	1.65	1.70	1.60	1.65	1.67
1.50	1.58	1.47	1.45	1.62	1.90	1.64	1.75	1.25	1.34	1.39	1.60	1.69
1.98	1.52	1.73	1.35	1.70	1.56							

Дали, со ниво на значајност 0.01, може да се смета дека новите даночни прописи ја намалиле продажбата во супермаркетот. Одговорот да се образложи.

5.2.11. Една машина произведува вратила со должина 20 mm. Пократките и подолгите вратила се отфрлаат бидејќи не ги задоволуваат потребите. За контрола на производствениот процес се мери дијаметарот на 40 случајно избрани вратила. При тоа се добиваат следните вредност

20.05	20.02	19.89	19.92	19.93	20.11	20.06	19.99	20.09	20.01
19.97	19.93	19.88	20.04	20.06	20.04	19.90	19.91	19.88	20.10
20.01	20.02	20.02	20.04	19.99	19.98	19.94	19.97	20.07	20.03
20.11	19.88	20.10	20.06	19.99	19.93	19.88	20.02	20.02	20.04

Дали, врз основа на овие резултати, може да се тврди дека должината на вратилата е различна од 20 mm, т.е., дека производствениот процес не одговара на потребите. Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

5.2.12. Во претходната кошаркарска сезона, екипата A имала просек од 58.3 поени по натпревар. Во следната сезона, после промена на тренерот, екипата го имала следниот учинок

поени	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
натпревари	4	8	13	11	4

Дали промената на тренерот го зголемила просекот на поени по натпревар? Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

5.2.13. Претходни анализи покажале дека експлоатацијата на еден рудник е исплатлива ако процентот на благородни метали во рудата е поголем од 1.1%. Извршени се мерења на 150 различни примероци руда и добиените резултатите се дадени во следната табела

метал %	0.1-0.5	0.5-0.9	0.9-1.3	1.3-1.7	1.7-2.1
примероци	12	36	52	41	9

Дали експлоатацијата на рудникот е исплатлива? Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

5.2.14. Една научна институција тврди дека развила математички модел со чија помош моше да се пресмета вредноста на акциите на берзата во следните пет дена, и релативната грешка што при тоа се прави има нормална распределба со стандардна девијација 5%. Предвидената и постигнатата вредност на акциите за пет денови е дадена во табелата

ден	1	2	3	4	5
предвидена вредност	120	135	115	103	92
постигната вредност	120	135	115	103	92

Дали, со ниво на значајност 0.1, може да се смета дека моделот одговара на реалноста? Одговорот да се образложи.

5.2.15. Еден производител на автомобили тврди дека моделот A троши 6.3 ± 0.2 l на 100 km. Еден сопственик на автомобил, сакајќи да го провери ова тврдење, во четири наврати приметил дека со 10 l бензин поминал: 155, 151, 152 и 150 km. Ако се претпостави дека потрошувачката на бензин има нормална распределба, да се провери дали тврдењето на производителот на автомобили е точно. Ако не е точно, дали вистинската потрошувачка епоголема или помала. Да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

5.2.16. На една кутија цигари пишува дека една цигара содржи 0.7 ± 0.02 mg. никотин. Сакајќи да го провери овој податок, една еколошка организација ја испитала содржината на никотин во пет случајно избрани цигари и ги добила следните резултати: 0.72, 0.73, 0.71, 0.69 и 0.71 mg. Ако содржината на никотин во цигарите има нормална распределба, тогаш дали врз основа на овие резултати може да се каже дека производителот на цигарите на кутијата навел помала содржина на никотин од вистинската? Да се користи ниво на значење 0.1 и одговорот да се образложи.

5.2.17. Производителот на една машина тврди дека таа работи без дефект најмалку 70 часови. Едно претпријатие ја набавило машината и приметило дека времето помеѓу два последователни дефекти од почетокот на работа на машината е: 63, 66, 70, 72, 55, 62 и 68 часови. Ако се претпостави дека времето помеѓу два последователни дефекти има нормална распределба, дали претпријатието има основа да рекламира кај производителот на машината за декларирање на неточни информации? Да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

5.2.18. Должината на трагите од кочење е важен параметар за безбедноста на едно возило и при исти услови на мерење има нормална распределба. При тестирањето на нов модел на автомобил извршени се 10 мерења на должината на трагигите од кочење при пропишани услови на мерење. Добиени се следнте резултати: 32.2, 35.7, 36.1, 38.4, 40.5, 40.9, 41.3, 41.4, 45.5 и 46.2 m. Дали врз основа на овие резултати може да се тврди дека автомобилот го задоволува безбедносниот стандард кој за таа класа автомобили пропишува максимална трагите од кочење 40 m. Да се користи ниво на значајност 0.1 и одговорот да се образложи.

5.2.19. Според меѓународните стандарди, притисокот на прскање на резервоарите за гас кои се користат кај автомобилите има нормална распределба и треба да изнесува најмалку ??? bar. Испитувањето на притисок на прскање на шест случајно избрани резервоари од еден дистрибутер, ги дало следните вредности: ?, ?, ?, ?, ? и ? bar. Дали испитувањето покажува дека резервоарите го задоволуваат стандардот, или не? При обете тестирања да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

5.2.20. Задачите да се решат под претпоставка дека не е позната стандардната девијација. Добиените резултати да се споредат маѓу себе.

5.3 ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ ЗА ДИСПЕРЗИЈАТА

Основни елементи од теорија

Решени задачи

5.3.1. Релативната грешка што се прави при мерење со даден инструмент има нормална распределба. Инструментот е исправен ако стандардна девијација на релативната грешка е најмногу 1%. Сто мерења со инструментот дале центрирана оценка за стандардна девијација

1.13%. Дали е тоа доволен индикатор дека инструментот не е исправен? Да се користи ниво на значајност 0.05.

Решение. Треба да се испита параметарот σ која ја означува стандардната девијација на релативната грешка што се прави при мерењето со инструментот. Гранична вредност при која инструментот е исправен е $\sigma = 1\%$, и спротивно на тоа ако $\sigma > 1\%$ тогаш инструментот не е исправен. Значи треба да се тестираат хипотезите

$$H_0 : \ \sigma = \sigma_0 \equiv 1\%$$
$$H_a : \ \sigma > \sigma_0 \equiv 1\%.$$

Тоа може да се направи бидејќи според условот на задачата параметарот σ има нормална распределба.

Од $n = 100$ мерења добиена е центрирана оценка за стандардна девијација $s = 1.13\%$, па затоа тест-статистиката е

$$\chi_*^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(100-1)\cdot 1.06^2}{1^2} \approx 126.4,$$

а за граничните вредности од табела 3 за $n-1 = 99 \approx 100$ степени на слобода и ниво на значајност $\alpha = 0.05$ се добива $\chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2 = 124.342$. Бидејќи е точно неравенството

$$\chi_*^2 = 126.4 > \chi_\alpha^2 = 124.342$$

може да се тврди, со ниво на значајност 0.05, дека нултата хипотеза треба да се отфрли, а алтернативната да се прифати. Тоа значи дека инструментот не е исправен (со ниво на значајност 0.05).

5.3.2. Стандардите предвидуваат масата на еден производ да има нормална распределба со стандардна девијација 2 gr. Случајно се избрани седум производи и нивната маса е: 96, 99, 104, 102, 98, 100 и 103 gr. Дали, со ниво на значајност 0.01, може да се смета дека производството одговара на стандардите?

Решение. Треба да се тестираат следните хипотези за стандардната девијација на масата на производите, означена со параметарот σ

$$H_0 : \ \sigma = \sigma_0 \equiv 2 \text{ gr}$$
$$H_a : \ \sigma \neq \sigma_0 \equiv 2 \text{ gr}.$$

Тестирањето може да се реализира бидејќи масата на производите има нормална распределба. Просечната маса на измерените примероци е

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7}\cdot(96+99+\cdots+103) = \frac{1}{7}\cdot 702 \approx 100.3 \text{ gr}$$

а центрираната оценка на стандардната девијација

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{6} \cdot \big[(96 - 100.3)^2 + \\ + (99 - 100.3)^2 + \cdots + (103 - 100.3)^2\big] \approx 7.22,$$

т.е., $s \approx 2.69$ gr. Понатаму, тест-статистиката има вредност

$$\chi_*^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(7-1) \cdot 7.22}{2^2} = 10.83,$$

а со помош на табела 3 за граничните вредности $\chi^2_{\alpha/2}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2}$ со ниво на значајност $\alpha = 0.01$ се добива:

степени слобода	веројатност	χ^2-вредност	заклучок
$n-1=6$	$p=\alpha/2=0.005$	18.548	$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.005} = 18.548$
$n-1=6$	$p=1-\alpha/2=0.995$	0.676	$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.995} = 0.676$

Бидејќи ниту еден од условите

$$\chi_*^2 < \chi^2_{1-\alpha/2} \quad \text{и} \quad \chi_*^2 > \chi^2_{\alpha/2}$$

не е исполнет, може да се заклучи дека (со ниво на значајност 0.01) нема докази за отфрлање на нултата хипотеза.

Дополнителни задачи

5.3.3. Теоретски анализи укажуваат дека стандардната девијација на случајната променлива X изнесува $\sigma_0 = 4$. За да се провери овој заклучок експериментот се повторува n пати и при тоа се добива центрирана оценка за стандардна девијација s.

а) $n = 50$ и $s = 4.2$;
б) $n = 50$ и $s = 4.02$;
в) $n = 20$ и $s = 3.8$;
г) $n = 20$ и $s = 3.08$.

За секој од овие случаи да се провери дали резултатите:

1) ја потврдуваат теоретски утврдената вредност на стандардната девијација на X;

2) укажуваат дека вистинската вредноат на стандардната девијација на X е поголема од теоретски утврдената; или
3) укажуваат дека вистинската вредноат на стандардната девијација на X е помала од теоретски утврдената.

Да се користи ниво на значајност $\alpha = 0.01$ и одговорот да се образложи. Добиените резултати да се споредат.

5.3.4. Една меѓународна корпорација во својот финансиски извештај тврди дека месечните примања на вработените во просек варираат $\pm 4000\$$. Случаен избор на 10 вработени дава центрирана оценка на стандардната девијација на нивните месечни примања 4122\$. Ако месечните примања имаат нормална распределба, да се провери дали корпорацијата во својот извештај дала грешни податоци. Да се користи ниво на доверба 0.1 и одговорот да се образложи.

5.3.5. Кај производстото на тркалачки лежишта, еден од најважните параметри е стандардната девијација (отстапувањето) на топчињата од номиналниот дијаметар. Еден производител, изработува топчиња чиј дијаметар има нормална распределба со стандардна девијација 0.00156 mm. За да ги намали трошоците, производителот го сменил производствениот процес и за 100 случајно избрани топчиња добил центрирана оценка за стандардна девијација 0.00211 mm. Дали овој податок е аргумент дека со новиот производствен процес се добиваат топчиња чиј дијаметар варира од номиналниот повеќе во споредба со претходниот процес? Да се користи ниво на доверба 0.01 и одговорот да се образложи.

5.3.6. За прво успешно мерење на брзината на светлината се смета експериментот на Симон Њуком, кој го мерел времето што е потребно свтлосен зрак упатен од неговата лабораторија на реката Потомак кон огледало поставено до споменикот на Вашингтон, да се одбие од огледалото и да се врати назад, минувајќи вкупно 7400 m. Денес знаеме дека за ова е потребно 0.0000248 s. Њуком експериментот го повторил 66 пати и отстапувањето на резултатите што ги добил од вистинската вредност, изразени во милионити делови од секундата, се

28	22	36	26	28	28	26	24	32	30	27	24	33	21	36	32	31	25
−44	25	28	36	27	32	34	30	25	26	26	25	24	23	21	30	33	29
27	29	28	22	26	27	16	31	29	36	32	28	40	19	37	23	32	29
−2	24	25	27	24	16	29	20	28	27	39	23						

Да се тестира хипотезата дека стандардната девијација на овие податоци е помала од 3 и при тоа да се користи ниво на доверба 0.05. Одговорот да се образложи.

5.3.7. Еден испит го полагале 65 студенти и резултатите се дадени во следната табела

поени	0-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
студенти	5	8	15	16	10	6

Да се тестира хипотезата дека стандардната девијација на овие податоци е различна од 5 и при тоа да се користи ниво на доверба 0.1. Одговорот да се образложи.

5.3.8. За ситуациите опишани во задачите 5.2.4, 5.2.14, 5.2.15 и 5.2.16 да се тестираат сите три хипотези кои можат да се формулираат за дадената вредност на стандардната девијација. Да се користи ниво на доверба 0.1 и одговорот да се образложи.

Глава 6

ТЕСТИРАЊЕ НА ХИПОТЕЗИ

ЗА ЗАКОНОТ НА РАСПРЕДЕЛБА

6.1 ПОДАТОЦИ ВО ЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНА ТАБЕЛА (χ^2-тест и тест на Колмогоров)

Основни елементи од теорија

Решени задачи

6.1.1. Еден дистрибутер нуди монитори од 4 различни производители. Во текот на претходната година тој регистрирал рекламации на 66 продадени монитори. Во следната табела е дадена распределбата на бројот на рекламации во однос на секој од четирите производители

производител	I	II	III	VI
рекламации	5	19	25	17

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 да се тестира хипотезата дека веројатноста за рекламација е иста за сите четири производители. Одговорот да се образложи.

Решение. Нека p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, е веројатноста за рекламација за монитор произведен од секој од производителите I, II, III и IV. Треба да се тестира хипотезата

H_0: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4} = 0.25$,

наспроти хипотезата

H_a: Барем две од веројатностите p_1, p_2, p_3 и p_4 не се еднакви.

Очекуваната вредност на бројот на рекламации за секој од четирите производители, под претпоставка дека хипотезата H_0 е точна, изнесува $E_i = n \cdot p_i = 66 \cdot 0.25 = 16.5$, $i = 1, 2, 3, 4$. Условот $E_i \geq 5$ е исполнет за секое $i = 1, 2, 3, 4$, па може да се продолжи со тестирањето. За тест статистиката се добива

$$\chi^2_* = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(28 - 16.5)^2}{16.5} + \frac{(19 - 16.5)^2}{16.5} + \frac{(25 - 16.5)^2}{16.5} + \\ + \frac{(17 - 16.5)^2}{16.5} \approx 12.79,$$

а за граничната вредност, од табелата 3 за $4 - 1 = 3$ степени на слобода и веројатност еднаква на нивото на значајност $p = \alpha = 0.01$, се добива $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.01} = 11.345$. Условот

$$\chi^2_* = 12.79 > \chi^2_\alpha = 11.345$$

е исполнет и тоа е доволен доказ за отфрлање на нултата хипотеза и прифаќање на алтернативната, т.е., веројатноста за рекламација не е иста за сите четири производители.

Образложение: p-вредноста на овој тест е дефинирана преку веројатноста

$$p\text{-вредност} = P(\chi^2 \geq \chi^2_*) = P(\chi^2 \geq 12.79)$$

со $4 - 1 = 3$ степени на слобода. Во табелата 3 најблиску до вредноста 12.79 (за 3 степени на слобода) се вредностите 9.348 и 11.345, кои одговараат на веројатностите 0.025 и 0.01, соодветно. Затоа p-вредноста е помеѓу 0.01 и 0.025, и е помала од нивото на значајност 0.05 кое ја означува максималната веројатност која може да се толерира. Следува дека H_0 треба да се отфрли, а H_a да се прифати како точна.

6.1.2. Во едед производствен процес се користат четири машини и бројот на дефекти што е регистриран кај секоја од нив во претходната година е даден во следната табела

машина број	1	2	3	4
број на дефекти	6	9	15	27

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.9 да се провери хипотезата дека случајната променлива X што го означува бројот на дефекти во претходната година има распределба на веројатностите

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/12 & 1/6 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Одговорот да се образложи.

Решение. Нека p_i е веројатноста за појавување на дефект кај i-тата машина, $i = 1, 2, 3, 4$. Значи треба да се тестираат хипотезите

H_0: $p_1 = \frac{1}{12}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{1}{4}$ и $p_4 = \frac{1}{2}$;

H_a: Барем една од претпоставените вредности во нултата хипотеза не е точна.

Во текот на петходната година кај сите четири машини се појавиле вкупно $n = 6 + 9 + 15 + 27 = 57$ дефекти. Под претпоставка дека хипотезата H_0 е точна, очекуваните вредности на бројот на дефекти за секоја од машините е $E_1 = n \cdot p_1 = 57 \cdot \frac{1}{12} = 4.75$, $E_2 = 9.5$, $E_3 = 14.25$ и $E_4 = 28.5$. Условот $E_i \geq 5$ е исполнет за секое $i = 1, 2, 3, 4$, па може да се продолжи со тестирањето. Тест статистиката изнесува

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(6-4.75)^2}{4.75} + \frac{(9-9.5)^2}{9.5} + \frac{(15-14.25)^2}{14.25} + \\ + \frac{(27-28.5)^2}{28.5} \approx 0.474,$$

а за граничната вредност, од табелата 3 за $4 - 1 = 3$ степени на слобода и веројатност еднаква на нивото на значајност $p = \alpha = 0.9$, се добива $\chi_\alpha^2 = \chi_{0.9}^2 = 0.584$. Условот

$$\chi_*^2 = 0.474 > \chi_\alpha^2 = 0.584$$

не е исполнет, односно не постојат доволно докази за отфрлање на нултата хипотеза.

Образложение: p-вредноста на овој тест е еднаква на веројатноста

$$p\text{-вредност} = P(\chi^2 \geq \chi_*^2) = P(\chi^2 \geq 0.474)$$

со $4-1 = 3$ степени на слобода. Во табелата 3 вредноста 0.474 (за 3 степени на слобода) се наоѓа помеѓу вредностите 0.352 и 0.584, кои одговараат на веројатностите 0.95 и 0.9, соодветно. Значи, бараната p-вредност е помеѓу 0.9 и 0.95, и е поголема од нивото на значајност 0.9, т.е., од максималната веројатност која може да се толерира. Од тоа следува дека податоците не даваат докази за отфрлање на H_0.

6.1.3. Температурата на еден раствор е измерена 90 пати и резултатите се дадени во табелата

температура [°C]	[-1,-0.5)	[-0.5,0)	[0,0.5)	[0.5,1)
број на појавувања	7	24	29	30

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 да се провери дали случајната променлива X, што ја означува температурата на растворот, има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} (x+1)/2, & x \in (-1,1) \\ 0, & x \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Одговорот да се образложи.

Решение. Нека p_1, p_2, p_3 и p_4 ги означуваат веројатностите дека температурата на растворот е во интервалот $[-1,-0.5)$, $[-0.5,0)$, $[0,0.5)$ и $[0.5,1)$, соодветно. Ако температурата на растворот е случајна променлива со густина на распределба како во условот на задачата и соодветна функција на распределба

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

тогаш $p_1 = P(-1 \le X < -0.5) = F_X(-0.5) - F_X(-1) = 0.0625$, и слично $p_2 = 0.1875$, $p_3 = 0.3125$ и $p_4 = 0.4375$. Значи треба да се тестираат хипотезите

H_0: $p_1 = 0.0625$, $p_2 = 0.1875$, $p_3 = 0.3125$ и $p_4 = 0.4375$;

H_a: Барем една од претпоставените вредности во нултата хипотеза не е точна.

Ако нултата хипотеза е точна тогаш од $n = 7+24+29+30 = 90$ мерења треба да се очекува следната распределба на измерените температурата на растворот (добиена со помош на формулата $E_i = n \cdot p_i$, $i = 1,2,3,4$)

температура [°C]	[-1,-0.5)	[-0.5,0)	[0,0.5)	[0.5,1)
број на појавувања (n_i)	7	24	29	30
очекуван број на појавувања (E_i)	7.5	15	22.5	45

Бидејќи $E_i \ge 5$, $i = 1,2,3,4$, може да се продолжи со пресметката на тест статистиката

$$\chi^2_* = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(7-7.5)^2}{7.5} + \frac{(24-15)^2}{15} + \frac{(29-22.25)^2}{22.25} + \\ + \frac{(30-45)^2}{45} \approx 12.311.$$

Граничната вредност за за $4-1=3$ степени на слобода и веројатност еднаква на нивото на значајност $p=\alpha=0.01$, согласно табелата 3, изнесува $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.01}=11.345$. Условот

$$\chi^2_* = 12.311 > \chi^2_\alpha = 11.345$$

е исполнет, па затоа може да се заклучи дека треба да се отфрли нултата, а да се прифати алтернативната хипотеза, односно, температурата на растворот има густина на распределба различна од онаа претпоставена во условот на задачата.

Образложение: За p-вредноста на овој тест се добива

$$p\text{-вредност} = P(\chi^2 \geq \chi^2_*) = P(\chi^2 \geq 12.311).$$

Во табелата 3 најблиску до вредноста 12.79 (за $4-1=3$ степени на слобода) се вредностите 12.838 и 11.345, кои одговараат на веројатностите 0.005 и 0.01, соодветно. Затоа p-вредноста е помеѓу 0.005 и 0.01, и е помала од максималната веројатност која може да се толерира, т.е., од нивото на значајност 0.01. Следува дека H_0 треба да се отфрли, а H_a да се прифати како точна.

6.1.4. Еден производител на прекинувачи го контролира производството така што 50 пати на случаен начин избира по 4 прекинувачи и ги испитува. Во следната табела се дадени податоци за тоа во колку случаи (од испитаните 50 групи од по 4 прекинувачи) се појавиле 0, 1, 2, 3 или 4 прекинувачи од прва класа

прекинувачи од прва класа	0	1	2	3	4
број на појавувања	1	2	7	22	18

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.1 да се провери дали бројот на прекинувачи од прва класа помеѓу сите призведени прекинувачи е случајна променлива со биномна распределба.

Решение. Испитани се вкупно $50\cdot 4=200$ прекинувачи и од нив од прва класа биле $0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 7+3\cdot 22+4\cdot 18=154$ прекинувачи. Ако се претпостави дека бројот на прекинувачи од прва класа помеѓу сите произведени прекинувачи е случајна променлива со биномна распределба, тогаш, согласно задача 4.1.4, следува дека најдобра центрирана оценка за веројатноста еден случајно избран прекинувач да биде од прва класа е $p=\frac{154}{200}=0.77$. Затоа, веројатноста p_i, меѓу четири случајно избрани прекинувачи да има i $(i=0,1,2,3,4)$ прекинувачи од прва класа е $p_i=\binom{4}{i}p^i(1-p)^{4-i}$, т.е,

$$p_0=0.0028,\ \ p_1=0.0375,\ \ p_2=0.1882,\ \ p_3=0.42,\ \ p_4=0.3515.$$

За да се провери дали е точна претпоставката треба да се тестираат хипотезите

H_0: $p_0 = 0.0028$, $p_1 = 0.0375$, $p_2 = 0.1882$, $p_3 = 0.42$, $p_4 = 0.3515$;
H_a: Барем еден од изразите во нултата хипотеза не е точен.

Ако нултата хипотеза е точна тогаш при $n = 50$ извлекувања на 4 орекинувачи треба да се очекува следната распределба на бројот на прекинувачи од прва класа (добиена со помош на формулата $E_i = n \cdot p_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$)

прекинувачи од прва класа	0	1	2	3	4
број на појавувања (n_i)	1	2	7	22	18
очекуван број на појавувања (E_i)	0.14	1.87	9.41	21.00	17.58

Бидејќи $E_0 < 5$ и $E_1 < 5$ тестирањето продолжува на тој начин што првите две колони се додаваат на третата, и се добива следната табела

прекинувачи од прва класа	2	3	4
број на појавувања (n_i)	10	22	18
очекуван број на појавувања (E_i)	11.42	21.00	17.58

Слично како во претходните задачи за тест хипотезата се добива

$$\chi^2_* = \sum_{i=2}^{4} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} = 5.53,$$

а за граничната вредност $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.1} = 7.779$. Конечно, бидејќи условот $\chi^2_* > \chi^2_\alpha$ не е исполнет може да се заклучи дека нема докази за отфрлање на нултата хипотеза.

6.1.5. Мерењето на протокот на една река ги дава следните резултати

водостој [l/s]	10-50	50-90	90-130	130-170	170-210	210-250
денови	3	18	76	104	91	1

Користејќи χ^2-тест и тест на Колмогоров да се провери дали протокот на реката е случајна променлива со нормална распределба. Да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

Решение.

6.1.6. Анкетата на 300 студенти во врска со бројот на неуспешни обиди за положување на еден предмет ги дава следните резултати

неуспешни обиди	0	1	2	3	4	5	6
број на студенти	158	96	34	7	3	1	1

Користејќи χ^2-тест и тест на Колмогоров да се провери дали бројот на неуспешни обиди до положување на предметот е случајна променлива со Пуасонова распределба. Да се користи ниво на значајност 0.1 и одговорот да се образложи.

Решение.

Дополнителни задачи

6.1.7. Испитување на сообраќајот на една раскрсница покажало дека во периодот од 14 до 16 часот, од 1252 автомобили, 398 завртеле лево, 420 продолжиле право и 434 завртеле десно.

а) Дали може да се смета дека сообраќајот на раскрсницата продолжува подеднакво во сите три насоки?

б) Дали може да се смета дека повеќе од 1/3 од автомобилите вртат десно?

Да се користи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 и одговорите да се образложат.

6.1.8. Во едно населено место се појавува епидемија на некое стомачно заболување. Анкетирањето на 40 заболени за количеството на вода што ја конзумираат ги дава следните резултати

литри вода	0	0.25	0.5	1-
заболени	6	11	13	10

Дали е тоа доволен доказ дека заболувањето е поврзано со конзумирањето на вода за пиење? Да се користи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

6.1.9. Бројот на појавувања на цифрите од 0 до 9 меѓу првите 800 децимали на бројот π дадени се во следната табела

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
појавувања	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

Дали, врз основа на овие податоци, може да се тврди дека веројатноста за појавување на секоја од цифрите $0, 1, 2, \ldots, 9$ помеѓу првите 800 децимали на бројот π е подеднаква. Да се користи χ^2-тест со ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

6.1.10. Еден предмет во последната година го положиле 127 студенти и при тоа распределбата на оцените е дадена во следната табела

оцена	6	7	8	9	10
студенти	11	21	41	37	17

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 да се провери дали случајната променлива X, што го означува бројот на студенти што ја добиле соодветната оцена, има распределба на веројатностите

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.15 & 0.3 & 0.3 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Одговорот да се образложи.

6.1.11. Времето потребно за склопување на еден производ измерено е кај 78 случајно избрани производи и добиени се следните резултати

време [s]	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
производи	2	7	11	12	6	1

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.1 да се провери дали случајната променлива X, што го означува времето потребно за склопување, има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} x/6, & x \in (0, 6] \\ -x/6 + 2, & x \in [6, 12) \\ 0, & x \notin (0, 12) \end{cases}.$$

Одговорот да се образложи.

6.1.12. Смртноста кај новороденчињата во САД во периодот од 1920 до 1980, изразен преку број на умрени бебиња во првата година од животот на 1000 бебиња родени живи, даден е во следната табела

година	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
смртност	85.5	64.6	47.0	29.2	26.0	20.0	12.6

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.1 да се провери дали случајната променлива X, што ја означува смртноста на бебињата, има експоненцијална распределба. Одговорот да се образложи. (Упатство: да се користи задача 4.1.2)

6.1.13. Направени се 400 мерења на бројот на возила што поминуваат преку еден мост во интервал од 10 секунди и добиени се следните резултати

број на возила	0	1	2	3	4	5	6	> 7
појавувања	72	103	139	97	61	22	7	2

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 да се провери дали бројот на возила што го преоѓаат мостот за време од 10 секунди е случајна променлива со Пуасонова распределба. Одговорот да се образложи.

6.1.14. Дневната продажба на една марка автомобили дадена е во следната табела

продадени автомобили	0	1	2	3	4	5	> 6
денови	196	189	79	22	4	2	0

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.05 да се провери дали дневната продажба на автомобили е случајна променлива со Пуасонова распределба. Одговорот да се образложи.

6.1.15. Градот Лондон поделен е на делови и во следната табела даден е преглед на бројот на бомби што паднале во секој од тие делови за време на едно бомбардирање од втората светска војна.

број на бомби	0	1	2	3	4	> 5
делови	229	211	93	35	7	1

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 да се провери дали бројот на бомби што паднале во еден од деловите на Лондон е случајна променлива со Пуасонова распределба. Одговорот да се образложи.

6.1.16. Еден кошаркар шутира 100 серии од по 2 слободни фрлања и нројот на серии со по 0, 1 и 2 погодоци даден е во следната табела

број на погодоци	0	1	2
број на серии	3	18	79

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.01 да се провери дали бројот на погодоци е случајна променлива со биномна распределба. Одговорот да се образложи.

6.1.17. Од шпил со 52 карти на случаен начин се извлекуваат 4 и се констатира бројот на десетки што при тоа се појавуваат. Со ниво на значајност 0.01 да се провери дали во шпилот има точно 4 десетки ако при 100 вакви извлекувања се добиени следните резултати

број на десетки	0	1	2	3	4
извлекувања	70	24	4	2	0

6.1.18. Во периодот од 0 до 6 часот наутро, во службата за прва помош е регистрирано дека: првиот повик бил во 0 часот и 12 минути; последниот во 5 часот и 45 минути; и распределба на повиците по часови како во табелата

час	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]
број на повици	9	12	19	16	13	10

Користејќи χ^2-тест со ниво на значајност 0.05 да се провери дали случајната променлива X, што го означува бројот на повици, има рамномерна распределба. Одговорот да се образложи.

6.1.19. Задачите 6.1.3, 6.1.18, 6.1.6, 6.1.13, 6.1.14 и 6.1.15 да се решат со помош на тестот на Колмогоров. Резултатите да се споредат со претходно добиените.

6.1.20. Користејќи χ^2-тест и тест на Колмогоров со ниво на значајност 0.05 да се провери дали податоците дадени во задачите 4.3.2, 4.3.3, 4.3.10, 4.3.11, 4.3.12, 4.4.1, 4.4.3, 4.4.6, 5.2.2, 5.2.3, 5.2.10, 5.2.11, 5.2.12, 5.2.13, 5.3.6 и 5.3.7 се земени од генерално множество со нормална распределба. Резултатите да се споредат со претходно добиените.

6.2 ПОДАТОЦИ ВО ДВОДИМЕНЗИОНАЛНА ТАБЕЛА

Основни елементи од теорија

Решени задачи

6.2.1. Во едно пртпријатие квалитетот на работата на работниците кои ги склопуваат производите се оценува според бројот на грешки на 1000 склопени производи, и се оценува со висок, среден и низок кавалитет на работа. Податоците за 100 работници се дадени во следната табела

		РАБОТНО ИСКУСТВО		
		1	2-5	6-10
КВАЛИТЕТ	висок	16	32	11
НА РАБОТА	среден	9	18	21
	низок	8	22	21

Да се провери, со ниво на значајност 0.05, дали постои зависност помеѓу работното искуство и квалитетот на работата. Одговорот да се образложи. (одговорот може, но не мора да биде потврден, бидејќи со зголемувањето на работното искуство работникот се заситува од работата која е еднолична)

Решение. Треба да се тестираат хипотезите

H_0: не постои зависност помеѓу работното искуство и квалитетот на работата,

H_a: постои зависност помеѓу работното искуство и квалитетот на работата.

За таа цел со сумирање на вредностите по редиците и колоните од дадената табела се добива

		РАБОТНО ИСКУСТВО			
		1	2-5	6-10	вкупно
КВАЛИТЕТ	висок	16	32	11	59
НА РАБОТА	среден	9	18	21	48
	низок	8	22	21	51
	вкупно	33	72	53	158

Следува табелата на очекувани вредности за бројот на грешки на 1000 склопени производи која се добива со помош на формулата $E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{n}$ (пример: $12.32 = \frac{58 \cdot 33}{158}$).

		РАБОТНО ИСКУСТВО		
		1	2-5	6-10
КВАЛИТЕТ	висок	12.32	26.89	19.79
НА РАБОТА	среден	10.03	21.87	16.1
	низок	10.65	23.24	17.11

Условот $E_{ij} \geq 5$ е исполнет, па може да се продолжи со тестирањето. Од овде, за број на редици $r = 3$ и бројот на колони $c = 3$, за добива дека тест статистиката е

$$\chi^2_* = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(16-12.32)^2}{12.32} + \frac{(32-26.89)^2}{26.89} + \cdots + \frac{(22-23.24)^2}{23.24} + $$
$$+\frac{(21-17.11)^2}{17.11} \approx 1.1 + 0.97 + \cdots + 0.07 + 0.89 = 9.87,$$

а граничната вредност отчитана од табела 3 за $(r-1)(c-1) = 4$ степени на слобода и веројатност еднаква на нивото на значајност, $p = \alpha = 0.05$, изнесува $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.05} = 9.488$. Условот

$$\chi^2_* = 9.87 > \chi^2_\alpha = 9.488$$

е исполнет и тоа е доволен доказ за отфрлање на нултата хипотеза и прифаќање на алтернативната, т.е., постои зависност помеѓу работното искуство и квалитетот на работата.

Образложение: p-вредноста на овој тест е дефинирана преку веројатноста

$$p\text{-вредност} = P(\chi^2 \geq \chi^2_*) = P(\chi^2 \geq 9.87)$$

со $(r-1)(c-1) = 4$ степени на слобода. Во табелата 3 најблиску до вредноста 9.87 (за 4 степени на слобода) се вредностите 9.488 и 11.143, кои одговараат на веројатностите 0.025 и 0.01, соодветно. Затоа p-вредноста е помеѓу 0.01 и 0.025, и е помала од нивото на значајност 0.05 кое ја означува максималната веројатност која може да се толерира. Следува дека H_0 треба да се отфрли, а H_a да се прифати како точна.

6.2.2. Анкетирани се директори на 30 мали, 30 средни и 30 големи производствени претпријатија во врска со степенот на автоматизираност на претпријатието. Добиени се следните резултати

		СТЕПЕН НА АВТОМАТИЗИРАНОСТ		
		низок	среден	висок
ГОЛЕМИНА НА ПРЕТПРИЈАТИЕТО	мало	8	8	14
	средно	18	6	6
	големо	13	10	7

Да се провери, со ниво на значајност 0.01, дали постои зависност помеѓу големината на претпријатието и степенот на автоматизираност. Одговорот да се образложи.

Решение. За да ги тестираме хипотезите

H_0: не постои зависност помеѓу големината на претпријатието и степенот на автоматизираност, и

H_a: постои зависност помеѓу големината на претпријатието и степенот на автоматизираност,

се сумираат вредностите во редиците и колоните на дадената табела, и се добиива

		СТЕПЕН НА АВТОМАТИЗИРАНОСТ			
		низок	среден	висок	вкупно
ГОЛЕМИНА НА ПРЕТПРИЈАТИЕТО	мало	8	8	14	30
	средно	18	6	6	30
	големо	13	10	7	30
	вкупно	39	24	27	90

Со помош на формулата $E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{n}$ се добива табелата на очекувани вредности (пример: $13 = \frac{30 \cdot 39}{90}$).

		СТЕПЕН НА АВТОМАТИЗИРАНОСТ		
		низок	среден	висок
ГОЛЕМИНА НА ПРЕТПРИЈАТИЕТО	мало	13	8	9
	средно	13	8	9
	големо	13	8	9

Секоја предвидена вредност $E_{ij} \geq 5$, па затоа може да се продолжи со тестирањето. Бројот на редици е $r = 3$, бројот на колони е $c = 3$ и тест статистиката е

$$\chi^2_* = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(N_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(8-13)^2}{13} + \frac{(8-8)^2}{8} + \cdots + \frac{(10-8)^2}{8} + $$
$$+ \frac{(7-9)^2}{9} \approx 1.92 + 0 + \cdots + 0.5 + 0.44 = 9.07.$$

Од табела 3 за $(r-1)(c-1) = 4$ степени на слобода и веројатност еднаква на нивото на значајност, $p = \alpha = 0.01$, се отчитува граничната вредност $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.01} = 13.277$. Затоа, условот

$$X^2_* = 9.07 > \chi^2_\alpha = 13.277$$

не е исполнет, а тоа значи дека нема докази за отфрлање на нултата хипотеза.

Образложение: p-вредноста на овој тест е еднаква на веројатноста

$$p\text{-вредност} = P(\chi^2 \geq \chi^2_*) = P(\chi^2 \geq 9.07)$$

со $(r-1)(c-1) = 4$ степени на слобода. Во табелата 3 вредноста 9.07 (за 4 степени на слобода) се наоѓа помеѓу вредностите 7.779 и 9.488, кои одговараат на веројатностите 0.1 и 0.05, соодветно. Затоа бараната p-вредност е помеѓу 0.05 и 0.1, и е поголема од нивото на значајност 0.01, т.е., од максималната веројатност која може да се толерира. Од тоа следува дека анкетата не дава докази за отфрлање на H_0.

6.2.3. Едно испитување покажува дека од 2676 испитаници со низок крвен притисок од кардиоваскуларни проблеми починале 21, додека од 3338 со повишен крвен притисок од истите проблеми починале 55. Дали постои зависност помеѓу висината на крвниот притисок и смртноста како последица од кардиоваскуларни проблеми? Да се користи ниво на значајност 0.005 и одговорот да се образложи.

Решение. Податоците дадени во задачата сумирани се во следната табела.

		ПОЧИНАТИ		
		од кардио	од друго	вкупно
КРВЕН	низок	21	2655	2676
ПРИТИСОК	висок	55	3283	3338
	вкупно	76	5938	6014

Потребно е да се тестираат хипотезите

H_0: не постои зависност помеѓу висината на крвниот притисок и смртноста како последица од кардиоваскуларни проблеми, и

H_a: постои зависност помеѓу висината на крвниот притисок и смртноста како последица од кардиоваскуларни проблеми.

За таа цел, со помош на формулата $E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{n}$, се добива табелата на очекувани вредности (пример: $33.8 = \frac{2676 \cdot 76}{6014}$)

		ПОЧИНАТИ	
		од кардио	од друго
КРВЕН	низок	33.8	2642.2
ПРИТИСОК	висок	42.2	3295.8

Бидејќи за секоја предвидена вредност важи $E_{ij} \geq 5$, може да се продолжи со тестирањето. Бројот на редици и на колони е $r = c = 2$, а тест статистиката е

$$\chi^2_* = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(21-33.8)^2}{33.8} + \frac{(2655-2642.2)^2}{2642.2} +$$

$$+ \frac{(55-42.2)^2}{42.2} + \frac{(3283-3295.8)^2}{3295.8} \approx 8.86.$$

Од табела 3, за $(r-1)(c-1) = 1$ степен на слобода и веројатност еднаква на нивото на значајност, $p = \alpha = 0.005$, се отчитува граничната вредност $\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.005} = 7.880$. Конечно, условот

$$X^2_* = 8.86 > \chi^2_\alpha = 7.880$$

е исполнет, па затоа може да се заклучи дека постојат доволно докази за отфрлање на нултата хипотеза и прифаќање на алтернативната, т.е., постои зависност помеѓу висината на крвниот притисок и смртноста како последица од кардиоваскуларни проблеми.

Образложение: p-вредноста на овој тест е дефинирана преку веројатноста

$$p\text{-вредност} = P(\chi^2 \geq \chi^2_*) = P(\chi^2 \geq 8.86)$$

со $(r-1)(c-1) = 1$ степен на слобода. Во табелата 3 најблиску до вредноста 8.86 (за 1 степен на слобода) се вредностите 9.141 и 10.828, кои одговараат на веројатностите 0.0025 и 0.001, соодветно. Затоа p-вредноста е помеѓу 0.001 и 0.0025, и е помала од нивото на значајност 0.005 кое ја означува максималната веројатност која може да се толерира. Следува дека H_0 треба да се отфрли, а H_a да се прифати како точна.

Дополнителни задачи

6.2.4. На сто луѓе поставени им се две прашања. Прво: колку често пиете пиво со ручекот; и второ: дали спортувате барем еднаш неделно. При тоа се добиени следните резултати

		СПОРТУВА	
		да	не
ПИВО СО РУЧЕК	секогаш	6	5
	најчесто	14	8
	понекогаш	13	11
	никогаш	22	21

Дали, со ниво на значајност 0.1, постои поврзаност помеѓу пиењето на пиво за ручек и спортувањето? Одговорот да се образложи.

6.2.5. Една анализа за успехот при студирањето во зависност од полот на студентите ги дава следните резултати

		ПОЛ	
		женски	машки
СТАТУС	дипломирале	112	534
	студираат	42	211
	се откажале	131	285

Дали успехот при студирањето зависи од полот на студентите? Да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

6.2.6. Податоците од едно испитување на етничката прпадност на жителите на Хавајските острови и нивната крвна група, дадени се во следната табела

		ЕТНИЧКА ПРИПАДНОСТ			
		домородци	домородци-белци	домородци-кинези	белци
	O	1903	4469	2206	53759
КРВНА	A	2490	4671	2368	50008
ГРУПА	B	178	606	568	16252
	AB	99	236	243	5001

Дали врз основа на овие податоци може да се тврди дека постои поврзаност помеѓу крвната група на жителите на Хавајските острови и нивната етничката прпадност? Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

6.2.7. По 30 студенти од прва, втора, трета и четврта година анкетирани се на прашањето: дали сте задоволни од храната во факултецкото бифе. Одговорите се сумирани во следната табела

		ГОДИНА НА СТУДИИ			
		прва	втора	трета	четврта
ЗАДОВОЛНИ	да	19	22	9	16
ОД БИФЕТО	делумно	9	11	23	8
	не	12	7	8	16

Дали мислењето на студентите за бифето зависи од нивната година на студии? Да се користи ниво на значајност 0.01 и одговорот да се образложи.

6.2.8. Произведени се 3 варијанти на еден рекламен спот. Првата трае 30 секунди, втората 25 и третата 20. Понатаму, избрани се 3 групи од по 70 студенти и на секоја група презентирана ѝ е телевизиска програма која содржи различна варијанта на спотот. Два дена потоа, секој од студентите се изјаснил дали се сеќава на името на рекламираниот производ. Добиена е следната структура на одговори

		ВАРИЈАНТА НА СПОТОТ		
		30 секунди	25 секунди	20 секунди
ОДГОВОР	да	19	30	11
	не	51	40	59

Дали може да се тврди дека постои поврзаност помеѓу времетраењето на рекламата и нејзиниот ефект врз гледачите? Да се користи ниво на значајност 0.04 и одговорот да се образложи.

6.2.9. Група од 40 болни кои се согласиле да тестираат нов лек, поделена е на две групи од по 20. На болните од првата група даден им е новиот лек, а на болните од втората "лажен" лек - дестилирана вода. Кај болните од првата група се излечиле 13, а кај втората 9. Дали лекот помага за лечење на болните? Да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

6.2.10. Едно испитување на 4124 луѓе од машки пол покажува дека 4096 од нив имаат нормален машки XY хромозом, а останатите абнормален машки XYY или XXY хромозом. Од лицата со нормален машки хромозом 381 имаат криминално досие, а од останатите 8. Дали тоа значи дек апостои поврзаност помеѓу криминалитетот на лицата од машки пол и аномалиите кај хромозомите? Да се користи ниво на значајност 0.05 и одговорот да се образложи.

Глава 7

ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА

7.1 КОЕФИЦИЕНТИ НА РЕГРЕСИЈАТА

пресметка на коефициентите
интервали на предвидување и доверба
тестирање на хипотези

Основни елементи од теорија

Решени задачи

7.1.1. Една институција секој месец објавува тендер за ист обем на работа. Податоци за бројот на учесници на тендерот - x, и постигнатата цена (во илјади евра) - y, за последните осум тендери, дадени се во следната табела

месец	фев	мар	апр	мај	јун	јул	авг	сеп
x-учесници на тендер	5	2	8	3	2	3	11	6
y-постигната цена	4.0	6.5	3.5	7.1	7.3	5.6	2.1	3.2

а) Да се определи равенката на правата на линеарната регресија помеѓу x и y. Во декартов координатен систем да се нацртаат податоците од табелата и регресионата права.

б) Да се определи 95%-тен интервал на доверба за наклонот на регресионата права. Да се објасни неговото значење.

в) Да се тестира хипотеза за растење/опаѓање (во зависност од резултатите добиени во деловите (а) и (б)) на правата на линеарна регресија, т.е, хипотеза за наклонот на линеарната регресија, a. Да се користи ниво на доверба 0.01 и одговорот да се образложи.

г) Со помош на правата на линеарна регресија да се предвиди колкава цена ќе се постигне со четири учесници на тендер. Да се определи 95%-тен интервал на предвидување за цената што ќе се постигне со четири учесници на тендер.

д) Да се определи 95%-тен интервал на доверба за средната вредност на цената што ќе се постигне со четири учесници на тендер.

Одговорите да се образложат.

Решение.

а) Равенката на правата на линеарната регресија помеѓу x и y е $y = ax+b = -0.5625 \cdot x + 7.725$, каде коефициентите се добиени на следниот начин:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8} \cdot (5 + 2 + \cdots + 6) = 5, \\
\overline{y} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{8} \cdot (4.0 + 6.5 + \cdots + 3.2) = 4.9125, \\
a_1 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{8} \cdot [(5-5)(4.0 - 4.9125) + \\
&\quad +(2-5)(6.5 - 4.9125) + \cdots + (6-5)(3.2 - 4.9125)] = -5.0625, \\
a_2 &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \\
&= \frac{1}{8} \cdot (5-5)^2 + (2-5)^2 + \cdots + (6-5)^2 = 9, \\
a &= \frac{a_1}{a_2} = \frac{-5.0625}{9} = -0.5625, \\
b &= \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 4.9125 - (-0.5625) \cdot 5 = 61.8
\end{aligned}$$

б) За пресметка на интевалот на доверба потребно е претходно да се определат следните параметри:

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b_i)]^2 =$$

$$= \frac{1}{8-2} \cdot \left\{ [4.0 - (-0.5625 \cdot 5 + 61.8)]^2 + [6.5 - (-0.5625 \cdot 2 + 61.8)]^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \; [3.2 - (-0.5625 \cdot 6 + 61.8)]^2 \right\} \approx 3899.54,$$

$$s = \sqrt{s^2} \approx 62.45,$$

$$s_a = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} = \frac{s}{\sqrt{a_2}} = \frac{62.45}{3} \approx 0.285$$

в)

7.1.2. Спроведено е испитување за висината на деца на возраст од 4 до 5 години. Во секое поле од следната табела дадено е колку од испитаните деца биле на возраст и висина во дадените интервали.

		y-ВИСИНА [cm]				
		89-91	91-93	93-94	94-95	95-96
x-ВОЗРАСТ (месеци)	48-50	5	1			
	50-52		9	2	1	
	52-54			11	3	
	54-56			3	5	
	56-58			1	8	
	58-60				2	10

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на правата на линеарна регресија да се предвиди висината на дете на возраст од 56 месеци. Да се определи 99%-тен интервал на предвидување за висина на дете на возраст од 56 месеци.

д) Да се определи 99%-тен интервал на доверба за просечната висина на децата на возраст од 56 месеци.

Одговорите да се образложат.

Решение.

Дополнителни задачи

7.1.3. Просечната температура и продажбата на еден освежителен пијалок дадени се во следната табела

месец	мар	апр	мај	јун	јул	авг	сеп
x-температура [°C]	10.3	14.2	17.7	22.1	26.6	28.4	26.1
y-продажба (100000 l)	4.0	6.5	3.5	7.1	7.3	5.6	2.1

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на правата на линеарна регресија да се предвиди месечната потрошувачка на освежителниот пијалок при просечна месечна температура од 24°C. Да се определи 90%-тен интервал на предвидување за месечната потрошувачка на освежителниот пијалок при просечна месечна температура од 24°C.

д) Да се определи 99%-тен интервал на доверба за средната вредност на количеството кислород што го внесува човек при 109 отчукувања на срцето во минута.

Одговорите да се образложат.

7.1.4. Бројот на студенти кои се запишале на еден факултет - x, како и делот од нив кои "фатиле" услов за втора година даден е во следната табела

учебна година	97/98	98/99	99/00	00/01	01/02	02/03
x-запишани во прва	381	368	327	244	211	186
y-услов за втора	204	184	167	104	93	68

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на линеарната регресија да се предвиди бројот на студенти што ќе "фатат" услов за во втора година ако во прва година се запишале 281 студент. Да се определи 95%-тен интервал на предвидување за бројот на студенти што ќе "фатат" услов за во втора година ако во прва година се запишале 281 студент. Одговорите да се образложат.

7.1.5. Трошоците за маркетинг и остварениот профит (во илјади евра) што едно претпријатие ги реализирало во текот на осум месеци дадени се во следната табела

месец	јан	фев	мар	апр	мај	јун	јул	авг
x-маркетинг	1.5	2.0	2.2	1.8	1.2	2.4	1.8	1.9
y-профит	9.2	12.0	14.1	11.8	8.5	14.9	11.1	12.1

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на регресионата права да се предвиди профитот ако во текот на еден месец за маркетинг се потрошат 1700 евра. Да се определи 98%-тен интервал на предвидување за профитот при трошоци за маркетниг од 1700 евра.

д) Да се определи 98%-тен интервал на доверба за средната вредност на профитот ако трошоците за маркетинг изнесуваат 1700 евра.

Одговорите да се образложат.

7.1.6. Податоците за висината на седум парови дадени се во следната табела

пар број	1	2	3	4	5	6	7
x-жена [cm]	164	159	169	172	162	167	170
y-маж [cm]	171	169	170	182	177	173	170

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на правата на линеарна регресија да се предвиди висината на мажот, ако неговата партнерка е висока 165 cm. Да се определи 98%-тен интервал на предвидување на висината на маж чија партнерка е висока 165 cm.

д) Да се определи 98%-тен интервал на доверба за просечната висината на маж со партнерка висока 165 cm.

Одговорите да се образложат.

7.1.7. Средната температура во месец мај во два соседни градови, во текот на осум години, дадена е во следната табела

година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
град x [°C]	18.4	17.8	17.2	16.1	20.5	19.4	15.7	16.8
град y [°C]	15.6	14.5	14.0	13.5	17.6	16.1	13.0	13.7

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со линеарна регресија да се предвиди температурата во месец мај во градот y, ако температурата во градот x е 18.8 °C. Да се определи 99%-тен интервал на предвидување на температурата во мај во градот y при температура од 18.8 °C во градот x.

д) Да се определи 99%-тен интервал на доверба за средната температурата во мај во y, ако температурата во x е 18.8 °C.

Одговорите да се образложат.

7.1.8. Потребна е скапа и софистицирана опрема за да се измери количеството кислород што човекот го внесува при дишењето - y. Направен е обид оваа големина да се пресмета преку бројот на отчукувања на срцето во една минута - x. Серија експерименти ги даваат следните вредности за x и y, соодветно.

експеримент број	1	2	3	4	5	6
x-отчукувања	94	96	95	95	94	95
y-кислород	0.473	0.753	0.929	0.939	0.832	0.983

експеримент број	7	8	9	10	11	12
x-отчукувања	104	104	106	108	110	113
y-кислород	1.178	1.176	1.292	1.403	1.499	1.592

експеримент број	13	14	15	16	17	18
x-отчукувања	113	118	115	121	127	131
y-кислород	1.599	1.749	1.746	1.897	2.040	2.231

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на правата на линеарна регресија да се предвиди количеството кислород што го внесува човек при 109 отчукувања на срцето во минута. Да се определи 99%-тен интервал на предвидување за количеството кислород што го внесува човек при 109 отчукувања на срцето во минута.

д) Да се определи 99%-тен интервал на доверба за средната вредност на количеството кислород што го внесува човек при 109 отчукувања на срцето во минута.

Одговорите да се образложат.

7.1.9. Во следната табела дадени се податоци за тежината и цената на 21 модел автомобили. Поточно, во секое поле од табелата дадено е колку од испитаните автомобили имале тезина и цена во дадените интервали.

		y-ЦЕНА (илјади евра)			
		6-8	8-12	12-15	15-20
x-ТЕЖИНА	0.8-1.1	2	3		
(тони)	1.1-1.3		2	6	
	1.3-1.5			1	7

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на линеарната регресија да се предвиди цената на автомобил што тежи 1.05 тони. Да се определи 90%-тен интервал на предвидување за цената на автомобил со тежина 1.05 тони.

д) Да се определи 90%-тен интервал на доверба за просечната цената на автомобили со тежина 1.05 тони.

Одговорите да се образложат.

7.1.10. Преглед на ефикасноста на еден кошаркар направен е на тој начин што во секое поле од следната табелата дадено е колку натпревари одиграл кошаркарот со минутажа и број на постигнати поени во соодветните интервали.

		y-ПОЕНИ			
		10-12	12-18	18-25	25-30
	25-30	1	6		
x-МИНУТАЖА	30-35		2	10	
	35-40		1	16	2
	40-48			1	17

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на линеарната регресија да се предвиди колку поени ќе постигне кошаркарот ако игра 32 минути. Да се определи 95%-тен интервал на предвидување за бројот на постигнати поени при 32 минути во игра.

д) Да се определи 95%-тен интервал на доверба за просечната број на постигнати поени при 32 минути во игра.

Одговорите да се образложат.

7.1.11. Распределбата на големините x и y окарактеризирана е со следната корелациона табела

		y				
		2	4	6	8	10
	1	1	4	1		
	3	1	2	8	1	
x	5		2	6	5	1
	7		1	1	8	1
	9				3	11

а), б), в) Исто како барањата (а), (б) и (в) од задача 7.1.1.

г) Со помош на правата на линеарна регресија да се предвиди вредноста на големината y кога $x = 4.5$. Да се определи 90%-тен интервал на предвидување за вредноста на y кога $x = 4.5$.

д) Да се определи 90%-тен интервал на доверба за средната вредност на големината y кога $x = 4.5$.

Одговорите да се образложат.

7.2 КОЕФИЦИЕНТ НА КОРЕЛАЦИЈА

оценка на коефициентот

тестирање на хипотези

Основни елементи од теорија

За ситуациите опишани во задачите од оваа секција:

а) Да се оцени коефициентот на корелација помеѓу x и y;

б) Врз основа на оценката добиена во делот (а), да се формулира соодветна хипотеза и истата да се тестира со ниво на значајност 0.01 (0.05).

в) Да се заклучи дали постои (и ако постои од каква природа) линеарна зависност помеѓу x и y. Што значи тоа за ситуацијата опишана во задачата?

Одговорите да се образложат.

Решени задачи

7.2.1. Седуммина вработени кои на работа одат со автомобил анкетирани се по следните прашања: 1. колкава е оддалеченоста од вашиот дом до работното место - x; и 2. колку време ви треба за наутро да стасате на работа - y. Одговорите се дадени во следнтата табела

вработен со реден број	1	2	3	4	5	6	7
x-оддалеченост $[\mathrm{km}]$	4.3	2.6	7.5	5.6	1.1	9.3	8.4
y-време $[\mathrm{min}]$	17.1	15.3	20.8	18.6	13.3	23.3	22

Решение.

7.2.2. Испитани се 14 примероци од еден ист тип на пневматици за автомобил. Податоците за притисокот во пневматикот - x, и за километрите поминати до неговата промена - y, дадени се во следната табела.

пневматик број	1	2	3	4	5	6	7
x-притисок $[\mathrm{bar}]$	2.1	2.1	2.2	2.2	2.3	2.3	2.4
y-1000 km	46	45	49	51	55	53	60

пневматик број	8	9	10	11	12	13	14
x-притисок $[\mathrm{bar}]$	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7
y-1000 km	59	59	55	51	49	44	45

Решение. коорд. сист. –» зависни, но не линеарно

7.2.3. Менаџерите на 35 претпријатија анкетирани се по следните прашања: 1. кое ниво на образование доминира во претпријатието - x; и 2. колкава е застапеноста на компјутерите во работата на претпријатието - y. Нивните одговори се сумирани во следната табела, каде секое поле го содржи бројот на менаџери кои дале одговор како во редицата и колоната во која се наоѓа полето.

		y-КОМПЈУТЕРИЗИРАНОСТ			
		1	2	3	4
	ниско	5			
x-ОБРАЗОВАНИЕ	средно	4	4	3	
	високо	2	4	6	7

1-ниска; 2-средна; 3-висока; 4-многу висока

Решение.

Дополнителни задачи

7.2.4. Во следната табела дадени се податоци за 9 случајно избрани студенти во поглед на редовноста на предавања - x, и оценката што ја добиле по предметот - y.

студент број	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x-редовност	1	1	2	3	3	4	4	5	5
y-оцена	5	5	6	6	7	8	9	9	10

редовност: 1-многу ниска; 2-ниска; 3-средна; 4-висока; 5-многу висока

7.2.5. Испитани се 8 примероци на почва земени од локации на различна оддалеченост од едно претпријатие од хемиската индустрија. Во следната табела дадена е оддалеченоста на локацијата од каде е земен примерокот - x, и концентрацијата на една штетна материја во него y.

примерок број	1	2	3	4	5	6	7	8
x-оддалеченост $[\mathrm{km}]$	0.3	0.5	0.8	1.2	1.7	2.0	2.2	2.5
y-штетна материја $[\mathrm{mg}]$	25	20	17	15	11	8	7	5

7.2.6. Потрошувачката на бензин - y, при брзина на движење на автомобилот - x, дадена е во следната табела

x-брзина $[\mathrm{km/h}]$	30	45	60	75	90
y-потрошувачка $[\mathrm{l/100km}]$	9.7	8.3	7.7	8.3	9.7

7.2.7. Една машина за пакување може да работи со три различни брзини. Направени се шест мерења, по две со секоја брзина - x, и бројот на грешки при пакувањето (на 1000 спакувани производи) - y, даден е во следната табела

мерење број	1	2	3	4	5	6
x-брзина	мала	мала	средна	средна	голема	голема
y-грешки	15	18	27	24	54	53

7.2.8. Еден предмет може да се полага преку три тестови и секој од нив се оценува од 0 до 100 поени. Резултатите од првиот тест - x, и збирот од поените од сите три тестови - y, за 40 студенти даден е во следната табела. Секое поле од табелата го содржи бројот на студенти кои на првиот и вкупно на трите теста освоиле број на поени во наведените интервали.

		y-ЗБИР ОД ТРИТЕ ТЕСТОВИ				
		0-60	60-120	120-180	180-240	240-300
	0-25	4	2	1		
	25-40	2	4	2	1	
x-ПРВИОТ	40-55	1	2	6	3	
ТЕСТ	55-70		2	1	5	
	70-85			1	8	4
	85-100				1	11

7.2.9. Група од 50 ученици се анкетирани по прашањата на хармонијата што ја чуствуваат во семејството - x, и личната самодоверба - y. Добиените одговори сумирани се во следната табела, каде секое поле го содржи бројот на ученици кои ги дале оценките на поставените прашања како во редицата и колоната во која се наоѓа полето.

		y-САМОДОВЕРБА			
		1	2	3	4
x-	1	3	4	1	2
ХАРМОНИЈА	2	2	3	4	1
ВО	3		2	6	3
СЕМЕЈСТВОТО	4	1	1	3	5
	5		1	4	4

1-многу висока; 2-висока; 3-средна; 4-ниска; 5-многу ниска

7.2.10. Во следната табела дадени се податоците добиени со анкетирање на 47 луѓе на прашањето за возраста - x, и бројот на книги прочитани во последната година - y.

		y-ПРОЧИТАНИ КНИГИ			
		0-2	2-5	5-10	10-20
	10-25	1	4	6	1
x-ВОЗРАСТ	25-40	5	3	1	1
	40-55	2	4	6	1
	55-70		2	8	2

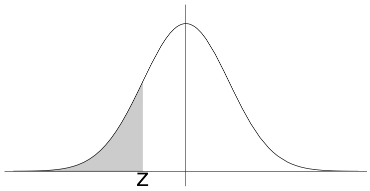
7.2.11. Барањата (а), (б) и (в), страна ???, да се реализираат за ситуациите опишани во задачите од секцијата 7.1.

-

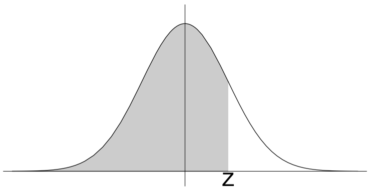
ТАБЕЛИ

Табела 1.

jдхсjхдлсклс
лщщлекщлкелщке



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414



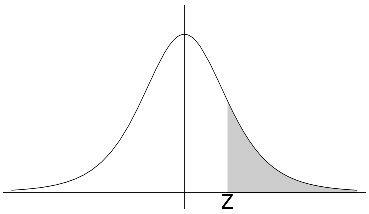
Табела 1.

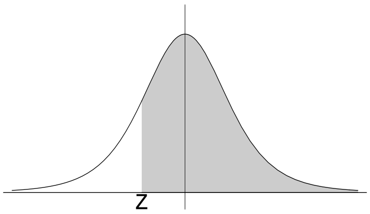
јдхсјхдлсклс
лщщлекщлкелщке

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976

Табела 2.

јдхсјхдлсклс
лщщлекщлкелщке



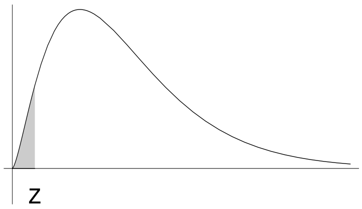


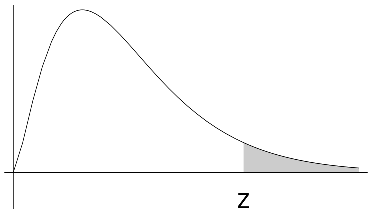
Табела 2.

јдхсјхдлсклс
лщщлекщлкелщке

Табела 3.

jдхсjхдлсклс
лщщлекщлкелщке





Табела 3.

јдхсјхдлсклс
лщщлекщлкелщке

ЛИТЕРАТУРА

[1] Grinstead C.M., Snell J.L.: Introduction to probability, American Mathematical Society, 1997.

[2] Mendenhall W., Sincich T.: Statistics for engineering and sciences, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

[3] Moore D.S., McCabe G.P.: Introduction to the practice of statistics, W.H. Freedman and company, New York, 1989.

[4] Југовић-Стојановић Д, Јевремовић М., Марић-Дедијер М.: Збирка задатака из теорије вероватноће и математичке статистике, Научна књига, Београд, 1992.

[5] Малишић Ј.: Збирка задатака из теорије вероватноће са применама, Грађевинска књига, Београд, 1970.

[6] Младеновић П.: Елементаран увод у вероватноћу и статистику, Друштво математичара Србије, Београд, 1998.

[7] Новковић М., Ковачевић И.: Збирка решених задатака из вероватноће и статистике, Stylos, Нови Сад, 1999.

[8] Стоянов Й., Миразчийски И., Игнатов Ц., Танушев М.: Ръководство за упражнения по теория на вероятностите, Наука и изкуство, София, 1976.

[9] Трпеновски Б.: Веројатност и статистика, Скопје, 1981.

[10] Beckmann P.: Elements of Applied Probability Theory, Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1968.

[11] Лозанов-Црвенковић З., Рајтер Д.: Збирка решених задатака из вероватноће и статистике, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1999.